[雙週一題]網路數學問題徵答
九十五學年度第二學期

主辦單位:　中山大學應用數學系
補助單位:　教育部

第五題:　　96.05.04公佈，96.05.18中午12點截止

設$P_1, P_2, \ldots, P_m$共m個人玩傳接球遊戲（不可自己傳給自己），由P_1開始請問傳n次回到P_1 的方法數有幾種？

解答：　設a_n表示從P_1傳出，n次後傳回P_1的方法數，b_n表示從P_1傳出，n次後傳到特定一位P_i的方法數$(i \in \{2, 3, \ldots, m\})$。因傳$n$次後球回到$P_1$手中，故傳到第$n-1$次時，球必定在其餘$(m-1)$人手中，所以可列出第一道遞迴關係式

$$a_n = (m-1)b_{n-1} \tag{1}$$

若傳n次後球傳到某特定一位P_i手中$(i \in \{2, 3, \ldots, m\})$，則傳到第$n-1$次時，球必定在$P_1$或是在其餘$(m-2)$人手中，所以可列出第二道遞迴關係式

$$b_n = a_{n-1} + (m-2)b_{n-1} \tag{2}$$

又因一開始球在P_1手中，故傳1次後，球在P_1的方法數為0，而球在特定一位P_i的方法數為$1 (i \in \{2, 3, \ldots, m\})$，因此初始值為$a_1 = 0, b_1 = 1$。

由(1)知$b_{n-1} = \frac{a_n}{(m-1)}$ 代入(2)得遞迴關係式:

$$\frac{a_{n+1}}{m-1} = a_{n-1} + (m-2)\frac{a_n}{m-1} \tag{3}$$

化簡後得:

$$a_{n+1} - (m-2)a_n - (m-1)a_{n-1} = 0$$

故其特徵方程式為:

$$\alpha^2 - (m-2)\alpha - (m-1) = 0$$

求得其特徵根為: $\alpha = -1$ 或$\alpha = (m-1)$ 為兩相異根。因此設其解為:

$$a_n = c_1(-1)^n + c_2(m-1)^n$$

將初始值$a_1 = 0$帶入上式得:

$$a_1 = -c_1 + c_2(m-1) = 0$$

所以$c_1 = c_2(m-1)$，將其代入(3)中得:

$$\begin{aligned} a_n &= c_2(m-1)(-1)^n + c_2(m-1)^n \\ &= c_2(m-1)\left[(-1)^n + (m-1)^{n-1}\right] \end{aligned} \tag{4}$$

又由(1)知:

$$b_{n-1} = \frac{a_n}{m-1} = c_2\left[(-1)^n + (m-1)^{n-1}\right]$$

將初始值$b_1 = 1$帶入上式得:

$$b_1 = c_2 m = 1$$

所以$c_2 = \frac{1}{m}$，將其代入(4)中得到:

$$a_n = \frac{m-1}{m}\left[(-1)^n + (m-1)^{n-1}\right]$$

故共有:

$$\frac{m-1}{m}\left[(-1)^n + (m-1)^{n-1}\right] \text{種傳法}$$