[雙週一題]網路數學問題徵答
九十五學年度第二學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第四題: 96.04.20公佈，96.05.04中午12點截止

設三角形三邊分別為a, b, c，建立另一個三角形三邊為$(-a+b+c)/2, (a-b+c)/2, (a+b-c)/2$，試證什麼三角形能重複這個程序無限多次?

例: 令三角形三邊分別為$3, 4, 4$，則可建立另一個三角形三邊為$\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}$，重複此程序可得三角形三邊為$\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}$，再重複一次可得$\frac{9}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$。

我們不難發現$\frac{9}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$ 不能成為三角形的三邊長。

解答： 首先忽略$1/2$這一個因子，因為能建構一三角形三邊為x, y, z若且為若可以建構一三角形三邊為$2x, 2y, 2z$。

考慮從a, b, c生成$(-a+b+c), (a-b+c), (a+b-c)$的優點是將這三邊相加之後仍然是$a+b+c$，所以我們可以將焦點只放在這三邊中的其中一邊。因此注意這個數列$a, (a+b+c)-2a, a+b+c-2(-a+b+c), \ldots$。設$d = 2a-b-c$。我們證明這程序生成的數列為$a, a-d, a+d, a-3d, a+5d, a-11d, a+21d, \ldots$。設第$n$項為$a+(-1)^n a_n d$，我們要證明$a_{n+1} = 2a_n + (-1)^n$。這是一個簡單的數學歸納法，當$n = 0$時，左式$= a_1 = -1$，右式$= 2a_0 + (-1) = -1$，因此公式成立。假設$n = k$時，$a_k = 2a_{k-1} + (-1)^{k-1}$。考慮$n = k+1$時，$a + (-1)^{k+1} a_{k+1} d = a+b+c-2(a+(-1)^k a_k d)$，因此$(-1)^{k+1} a_{k+1} d = -d - 2(-1)^k a_k$，所以$a_{k+1} = 2a_k + (-1)^k$。但是$a_n$是無界的數列。因此如果$d$是非零，則這個程序最後會生成一個負數。對於生成三角形的程序的一個必須限制條件是$2a = b+c$。同理，$2b = c+a$是一個必須的限制條件。這兩個聯立方程式意味著$a = b$且$a = c$。所以一個必須的限制條件是這個三角形是等邊三角形。這是很明顯的，且是充分的。

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真07-5253809，或利用電子郵件信箱problem@math.nsysu.edu.tw (主旨為「雙週一題」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和E-mail。