[雙週一題]網路數學問題徵答
九十五學年度第二學期

主辦單位:　中山大學應用數學系
補助單位:　教育部

第三題:　　96.04.06公佈，96.04.20中午12點截止

若$(\tan A_1)\cdots(\tan A_n)=1$，請找出$(\sin A_1)\cdots(\sin A_n)$的最大值。

解答 解法1. 首先將$(\tan A_1)\cdots(\tan A_n)=1$，等號兩邊同時乘以$(\cos A_1)\cdots(\cos A_n)$，可得到

$$(\sin A_1)\cdots(\sin A_n)=(\cos A_1)\cdots(\cos A_n).$$

令$x=(\sin A_1)\cdots(\sin A_n)=(\cos A_1)\cdots(\cos A_n)$，則

$$\begin{aligned}
x^2 &= (\sin A_1)\cdots(\sin A_n)(\cos A_1)\cdots(\cos A_n)\\
x^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^n(2\sin A_1\cos A_1)\cdots(2\sin A_n\cos A_n)\\
x^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^n(\sin 2A_1)\cdots(\sin 2A_n)\\
x^2 &\le \left(\frac{1}{2}\right)^n\\
x &\le \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2}
\end{aligned}$$

可以發現當$A_1=\cdots=A_n=\pi/4$時，等式$(\tan A_1)\cdots(\tan A_n)=1$成立且$x=\left(\frac{1}{2}\right)^{n/2}$。因此$(\sin A_1)\cdots(\sin A_n)$的最大值為$2^{-n/2}$。

解法2. 令$t_i=\tan A_i$，則$\prod_{i=1}^n t_i=1$且$\sin A_i=t_i/\sqrt{1+t_i^2}$。
不失其一般性我們可以只考慮$0<A_i<\pi/2$，因此$t_i>0$。
故

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^n \sin A_i &= \prod_{i=1}^n \frac{t_i}{\sqrt{1+t_i^2}} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+t_i^2}}\\
&\le \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2t_i}} = 2^{-n/2}\left(\prod_{i=1}^n t_i\right)^{-1/2} = 2^{-n/2}.
\end{aligned}$$

當$t_i=1$時，等號成立，因此$A_i=\pi/4$，且$(\tan A_1)\cdots(\tan A_n)=1$也成立。因此$(\sin A_1)\cdots(\sin A_n)$的最大值為$2^{-n/2}$。

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真07-5253809，或利用電子郵件信箱problem@math.nsysu.edu.tw (主旨為「雙週一題」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和E-mail。