[雙週一題]網路數學問題徵答
九十五學年度第二學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第二題: 96.03.23公佈，96.04.06中午12點截止

證明以下方程式無正整數解

$$4a^3+2b^3=c^3$$

解答： 我們利用良序原理(well-ordering principle)及反證法來證明此題。令S為所有正整數a的集合，以至於存在正整數b和c滿足此方程式。

利用反證法，我們假設S為一個非空的集合，那麼S一定包含一個最小的元素a_0 (良序原理)。由S的定義可知，將存在一組對應的b_0和c_0以致於

$$4a_0^3+2b_0^3=c_0^3$$

既然此等式的左邊和是偶數，故c_0^3必為偶數，所以c_0為偶數。因此存在一個正整數c_1，以致於$c_0=2c_1$。將其代入上式中，並將等式兩邊同時除以2後，得

$$2a_0^3+b_0^3=4c_1^3$$

由上式可知b_0^3必為偶數，所以b_0為偶數。因此存在一個正整數b_1，以致於$b_0=2b_1$。將其代入上式中，並將等式兩邊同時除以2後，得

$$a_0^3+4b_1^3=2c_1^3$$

從上式可知a_0^3必為偶數，所以a_0為偶數。因此存在一個正整數a_1，以致於$a_0=2a_1$。將其代入上式中，並將等式兩邊同時除以2後，得

$$4a_1^3+2b_1^3=c_1^3$$

由上我們發現$a=a_1, b=b_1$和$c=c_1$為原方程式的另一組解且$a_1<a_0$，所以a_1也為S的元素。但是這矛盾到a_0為S中最小元素的假設。因此我們的假設是錯的，故原式無正整數解。

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真07-5253809，或利用電子郵件信箱problem@math.nsysu.edu.tw (主旨為「雙週一題」) 。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和E-mail。