[雙週一題]網路數學問題徵答
九十五學年度第二學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部顧問室

第一題: 96.03.09公佈，96.03.23中午12點截止

試證對任何正整數n

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2.$$

解答： 參考柯岱宏(高雄中學)，楊唯農(台大數學系友)，姚建銘(瑞祥高中數學老師)，廖偉志(正心高中)...等。

(解法1.) $\frac{1}{t(t+1)}<\frac{1}{t^2}<\frac{1}{t^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)$
因為要證明: $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$
所以證明 $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1, \quad \forall n\in\mathbb{N}$ 即可.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} &= \sum_{t=2}^{n}\frac{1}{t^2}\\
&< \sum_{t=2}^{n}\frac{1}{t^2-1}\\
&= \sum_{t=2}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n+1)}\right)<1
\end{aligned}$$

故原式得證: $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$

(解法2.)

$$\because\ \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx=-\left.\frac{1}{x}\right|_1^n=1-\frac{1}{n}$$
$$\therefore 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}<2, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

(解法3.)

$$\begin{aligned}
1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} &< 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 3}+\cdots+\frac{(n-1)}{n}\\
&= 1+(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})\\
&= 2-\frac{1}{n}<2, \quad \forall n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}$$

(解法4.)

$$\begin{aligned}
1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} &< 1+2\times\frac{1}{2^2}+4\times\frac{1}{4^2}+8\times\frac{1}{8^2}+\cdots\\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2, \quad \forall n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}$$

答案請寄至高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真07-5253809，或利用電子郵件信箱problem@math.nsysu.edu.tw。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級和學號。