[雙週一題]網路數學問題徵答
九十六學年度第一學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第五題: 96.11.16公佈，96.11.30中午12點截止

從平面上的一點$S=(a,b), 0<b<a$出發，並依下列規則

$$x_0=a, \quad y_0=b, \quad x_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}, \quad y_{n+1}=\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}$$

構造出一連串的點(x_n,y_n)，試問當$n\to\infty, (x_n,y_n)$是否會收斂？若是則此極限點爲何？

解答： 對所有的n，由

$$x_{n+1}y_{n+1}=x_ny_n, \quad x_0=a, \quad y_0=b$$

我們有

$$x_ny_n=ab \tag{1}$$

且$a,b>0$可知x_n和y_n爲正數，利用算術平均大於或等於調和平均的性質得

$$y_{n+1}=\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}=\frac{2}{\frac{1}{x_n}+\frac{1}{y_n}}\le\frac{x_n+y_n}{2}=x_{n+1}$$

又$x_0>y_0$，因此

$$0\le x_{n+1}-y_{n+1}=\frac{(x_n+y_n)^2-4x_ny_n}{2(x_n+y_n)}=\frac{x_n-y_n}{x_n+y_n}\cdot\frac{x_n-y_n}{2}\le\frac{x_n-y_n}{2}$$

從而有

$$0\le x_n-y_n\le\frac{x_0-y_0}{2^n} \tag{2}$$

由(1)和(2)且x_n和y_n爲正數可得

$$\begin{aligned}
x_{n+1}&=\frac{x_n+y_n}{2}\le\frac{x_n+x_n}{2}=x_n\\
y_{n+1}&=\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}\ge\frac{2x_ny_n}{x_n+x_n}=y_n\\
x_n^2&\ge x_ny_n=ab\Rightarrow x_n\ge\sqrt{ab}\\
y_n^2&\le x_ny_n=ab\Rightarrow y_n\le\sqrt{ab}
\end{aligned}$$

因此$\{x_n\}$爲一單調遞減函數，且有下界$\sqrt{ab}$，$\{y_n\}$爲一單調遞增函數，且有上界$\sqrt{ab}$，可知x_n與y_n的極限值存在，所以由(2)得

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

再由(1)得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \sqrt{ab} \qquad \square$$

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞07-5253809，或利用電子郵件信箱problem@math.nsysu.edu.tw (主旨爲「雙週一題」) 。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和E-mail。