

[雙週一題]網路數學問題徵答  
九十六學年度第一學期

主辦單位：中山大學應用數學系

補助單位：教育部

第三題： 96.10.19公佈，96.11.02中午12點截止

求出下列聯立方程式的解： $(x, y, z \in \mathbb{R})$

$$x + xy + xyz = 12$$

$$y + yz + yzx = 5$$

$$z + zx + zxy = 6$$

解答：由題目中可看出  $x, y, z$  皆不為 0。(若有一為 0 則必有一式之值為 0)

我們令  $a = x, b = xy, c = xyz$ ，所以原式可轉換成：

$$\begin{cases} a + b + c = 12 \\ \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + c = 5 \\ \frac{c}{b} + \frac{ac}{b} + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 12 & (1) \\ (c - 5)a + b + c = 0 & (2) \\ ca + (c - 6)b + c = 0 & (3) \end{cases}$$

由第 (1) 式可推出  $b + c = 12 - a$  代入第 (2) 式後可得到  $(c - 6)a = -12 \cdots (4)$

由第 (2) 式可推出  $ca = 5a - b - c$  代入第 (3) 式後可得到  $5a + (c - 7)b = 0 \cdots (5)$

我們可確定  $c \neq 6, 7$  (因為  $x, y, z$  皆不為 0)，所以由第 (5) 式和第 (6) 式可得到：

$$\begin{cases} a = \frac{12}{6-c} \\ b = \frac{60}{(6-c)(7-c)} \end{cases} \Rightarrow \text{代入第 (1) 式} \Rightarrow c^3 - 25c^2 + 186c - 360 = 0 \Rightarrow c = 3, 10, 12$$

故  $(a, b, c) = (4, 5, 3), (-3, 5, 10), (-2, 2, 12)$

$\Rightarrow (x, y, z) = (4, \frac{5}{4}, \frac{3}{5}), (-3, -\frac{5}{3}, 2), (-2, -1, 6)$  □

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 [problem@math.nsysu.edu.tw](mailto:problem@math.nsysu.edu.tw) (主旨為「雙週一題」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。