[雙週一題]網路數學問題徵答
九十六學年度第一學期

主辦單位:　中山大學應用數學系
補助單位:　教育部

第二題:　　96.10.05公佈，96.10.19中午12點截止

有多少種n個數字$d_n d_{n-1}\cdots d_1, d_i = 0,1,\ldots,9, i = 1,2,\ldots,n$的排列，包含偶數個0的排列？(Ex. 00030 爲 5 個數字的排列,有 4 個 0)

解答：設a_n爲含偶數個0的n位數的排列數，很明顯$a_1 = 9(1,2,\ldots,9)$，而要得到n位數此種排列：首先，附加上一個非零位數在$n-1$位數包含偶數個零的字串，共有$9a_{n-1}$種方法。接下來，加上一個零到有奇數個零的$n-1$位數的字串，所以有$10^{n-1}-a_{n-1}$種方法。因此$a_n = 9a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1}) = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$。考慮下列$n-1$個式子的和

$$\begin{aligned}
a_n &= 8a_{n-1} + 10^{n-1} \\
8a_{n-1} &= 8(8a_{n-2} + 10^{n-2}) \\
&\vdots \\
8^{n-2}a_2 &= 8^{n-2}(8a_1 + 10^1)
\end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned}
a_n &= 8^{n-1}a_1 + 10^{n-1}\sum_{k=0}^{n-2}(\frac{8}{10})^k \\
&= 9\cdot 8^{n-1} + 5\cdot 10^{n-1}[1-(\frac{8}{10})^{n-1}] \\
&= \frac{1}{2}\left(2^{3n+1} - 8^n + 10^n\right) \\
&= \frac{8^n + 10^n}{2}
\end{aligned}$$

□

答案請寄至–高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞07-5253809，或利用電子郵件信箱problem@math.nsysu.edu.tw (主旨爲「雙週一題」) 。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和E-mail。