九十五學年第一學期雙週一題期末競賽　　96.02.04.

高中組第一題：

證明 $\{1,2,...,2007\}$有奇數個非空子集 S，其元素的平均值是整數。

【**解答**】參考 王思博(蘭雅國中)

$\{1,2,...,2007\}$共$2^{2007}-1$個非空子集
故$\{1,2,...,2007\}$有奇數個非空子集其元素平均爲整數
$\Leftrightarrow$ $\{1,2,...,2007\}$有偶數個非空子集其元素平均非整數
考慮任一元素平均非整數的集合$S=\{x_1,...,x_n\}$
令$S'=\{2008-x_1,2008-x_2,...,2008-x_n\}$
則S'之平均亦非整數(爲$2008-S$平均),又$S'\neq S$
(若$S'=S$, 則$\forall\ i=1,...,n$,$\exists j=1,...,n$, s.t. $x_i+x_j=2008$,
則S之元素之平均爲1004爲整數 $\rightarrow\leftarrow$)
故有偶數個非空子集其元素平均非整數,即有奇數個非空子集其元素平均爲整數.

九十五學年第一學期雙週一題期末競賽　　96.02.04.

高中組第二題：

甲、乙二人在一個3×3的格子紙上玩一個遊戲，甲、乙輪流在一空格上填一實數，甲先行。當9個格子都填上實數後，得一 3×3矩陣。若矩陣的行列式值爲0，則乙獲勝。否則，甲獲勝。問誰有穩贏的策略？策略是什麼？

【**解答**】參考 廖冠傑(彰化高中)

乙穩贏.

策略: 不妨設甲在正中間填1(否則可移至中間),則乙在左下角填0, 接下來不論甲填那, 乙可以在左上或右下填0使得兩個0之間的空格尚未填入, 接下來, 甲必須填此空格, 否則乙在此填入0,則獲勝。此時,矩陣如下圖

a	b	c
d	1	e
0	f	0

其中f已填入實數,a,b,c,d,e中只有一個位置填入實數,其它爲空格。乙在接下來的兩步,任填a,e之一爲0，再任填c,d之一爲0即獲勝。

九十五學年第一學期雙週一題期末競賽　　96.02.04.

高中組第三題：

是否存在正整數 x、n，使得 $x^{n+1}-(x+1)^n=2007$ ？

【解答】參考 廖冠傑(彰化高中)

以x、$x+1$作同模同餘

$\Rightarrow\ -1\equiv 2007(mod\ x)\ \Rightarrow\ 2008\equiv 0(mod\ x)$

而$(-1)^{n+1}\equiv 2007(mod\ x+1)\ \Rightarrow\ 2008\equiv 0[mod\ (x+1)]$ or $2006\equiv 0[mod\ (x+1)]$

於是 $x|2008$，$(x+1)|2008$ or $(x+1)|2006$,而2008的因數中的連續正整數只有1和2,但$x=1$顯然不合, 故$x+1|2006$,而$2008=2^3\times 251$，$2006=2\times 17\times 59$其中仍無$x=1$以外的因數滿足 $x|2008$ 及 $(x+1)|2006$,故此方程式無正整數解。

九十五學年第一學期雙週一題期末競賽　　96.02.04.

大專組第一題：

假設$*$是集合X上的二元運算，不一定滿足結合律或交換律。但是$\forall\ x, y \in X$，$(x * y) * x = y$。証明$\forall\ x, y \in X$，$x * (y * x) = y$。

【解答】參考 劉必宏(長榮資工)

$\forall x, y \in X$，由$(x * y) * x = y$兩邊右$*(x * y)$得

$((x * y) * x) * (x * y) = y * (x * y)$。

但$((x * y) * x) * (x * y) = x$

$\Rightarrow y * (x * y) = x.$

互換x, y得$x * (y * x) = y.$

九十五學年第一學期雙週一題期末競賽　　96.02.04.

大專組第二題：

設 $p(x)$是一整係數多項式。$x_0 = 0$ ， $x_n = p(x_{n-1})$ $(n = 1, 2, ...)$。證明若存在正整數 N，使得 $x_N = 0$，則 $x_1x_2 = 0$。

【解答】

令$x_1 = c$。若$c = 0$,則結論成立. 假設$c \neq 0$. 對任意$k \geq 2$,
$x_k - x_{k-1} = p(x_{k-1}) - p(x_{k-2})$是$x_{k-1} - x_{k-2}$的倍數。
$(\because a - b|a^n - b^n, \therefore a - b|p(a) - p(b))$
令$x_k - x_{k-1} = \lambda_k(x_{k-1} - x_{k-2}), \lambda_k \in \mathbf{Z}$.
因$x_N = 0$，故$x_{N+1} = p(0) = c$.
$\Rightarrow c = x_{N+1} = x_{N+1} - x_N = \lambda_{N+1}\lambda_N \cdots \lambda_2 c$.
$\Rightarrow \lambda_j \in \{1, -1\}, \forall j = 2, 3, \cdots, N + 1$.
若$\lambda_j = 1, \forall j = 2, 3, \cdots, N + 1$, 則$x_j - x_{j-1} = c \Rightarrow x_j = jc$ 矛盾.
若j是最小的整數使得$\lambda_j = -1$，則$x_j = x_{j-2} = (j - 2)c$.
$\Rightarrow x_{j+1} = p(x_j) = p(x_{j-2}) = x_{j-1}$.
由歸納法可知$x_k = x_{k-2}, \forall k \geq j$.
與$x_N = 0$矛盾，除非$j = 2$且$x_2 = 0$.

九十五學年第一學期雙週一題期末競賽　　96.02.04.

大專組第三題：

設p是質數，$q=p^2$，$D=\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^p & y^p & z^p \\ x^q & y^q & z^q \end{vmatrix}$，

証明對任意的整數b，c，在模 p 的意義下，$x+by+cz$是D的一個因子。

【解答】

根據費馬小定理，在模 p 的意義下，

$$b^p=b, c^p=c, b^q=(b^p)^p=b^p=b, c^q=c.$$

且

$$(x+by+cz)^p=x^p+b^py^p+c^pz^p=x^p+by^p+cz^p,$$

$$(x+by+cz)^q=x^q+by^q+cz^q.$$

所以$D=\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^p & y^p & z^p \\ x^q & y^q & z^q \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+by+cz & y & z \\ x^p+by^p+cz^p & y^p & z^p \\ x^q+by^q+cz^q & y^q & z^q \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+by+cz & y & z \\ (x+by+cz)^p & y^p & z^p \\ (x+by+cz)^q & y^q & z^q \end{vmatrix}$

$$=(x+by+cz)\begin{vmatrix} 1 & y & z \\ (x+by+cz)^{p-1} & y^p & z^p \\ (x+by+cz)^{q-1} & y^q & z^q \end{vmatrix}.$$