

[雙週一題]網路數學問題徵答
九十四學年度第一學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部顧問室

第四題: 94.10.28公佈, 94.11.11中午12點截止

大專組:

找出所有的實係數多項式 $f(x)$, 使得 $f(x^{2005}) = f(x)^{2005}$.

【解答】參考王嘉慶(台大數學), 姚建銘(瑞祥高中教師)

劉必宏(台大資工), 郭士豪(成功高中教師)。

(1) 若 $f(x)$ 為常數多項式:

令 $f(x) = c$, c 為常數。

$$\because f(x^{2005}) = f(x)^{2005}$$

$$\Rightarrow c = c^{2005}$$

$$\Rightarrow c = 0 \text{ or } \pm 1.$$

(2) 若 $f(x)$ 不為常數多項式:

令 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 其中 $a_n \neq 0$.

claim: $a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1, a_0$ 全為0。

反證法 $\Rightarrow \exists$ a maximum integer $k \in \{n-1, n-2, \cdots, 1, 0\}$, such that $a_k \neq 0$.

$$\because f(x^{2005}) = f(x)^{2005}$$

$$\Rightarrow a_n x^{2005n} + a_k x^{2005k} + \cdots + a_1 x^{2005} + a_0 = (a_n x^n + a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0)^{2005}$$

比較等號兩邊 $x^{2004n+k}$ 的係數,

$$\Rightarrow 0 = C_1^{2005} a_n^{2004} a_k$$

$$\Rightarrow a_n = 0 \text{ or } a_k = 0. (\rightarrow \leftarrow)$$

$$\Rightarrow a_{n-1} = a_{n-2} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = a_n x^n.$$

$$\because f(x^{2005}) = f(x)^{2005}$$

$$\Rightarrow a_n x^{2005n} = a_n^{2005} x^{2005n}$$

$$\Rightarrow a_n = a_n^{2005}$$

$$\Rightarrow a_n = \pm 1 \text{ or } 0 (\text{不合}).$$

$$\Rightarrow f(x) = \pm x^n, n \in \mathbb{N}.$$

由(1)(2) $\Rightarrow f(x) = 0, \pm 1, \text{ or } \pm x^n, n \in \mathbb{N}$.

【註】成績於11月15日前公布於雙週一題網頁。(www.math.nsysu.edu.tw/~problem)