

第二題：

92.3.14 公布，92.3.28 中午截止

考慮一實係數多項式

$$p(x) = a_0 + b_1x + 3a_2x^2 + b_3x^3 + 5a_4x^4 .$$

假設 $a_0 + a_2 + a_4 = 0$ ，試證 $p(x) = 0$ 在區間 $[-1, 1]$ 中有一實根。

【解】黃天亮（雄中高二）

因為 $a_0 + a_2 + a_4 = 0$ ，所以

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 p(x)dx &= \left(a_0x + \frac{b_1}{2}x^2 + a_2x^3 + \frac{b_3}{4}x^4 + a_4x^5 \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= 2(a_0 + a_2 + a_4) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

由積分均值定理可知，存在 $\alpha \in [-1, 1]$ ，使得

$$0 = \int_{-1}^1 p(x)dx = [1 - (-1)]p(\alpha) = 2p(\alpha) .$$

即 α 為 $p(x) = 0$ 的一個解。

□

完全答對：

台大數學系：連威翔、陳聖華。

高師數學系：李振宇（碩一）。

中山應數系：黃韋強（大二）、楊宗穎（碩一）

高雄中學：黃天亮（高二）、王鈺維（高一）。

立志中學：蔡政江（國三）。