

數學的應用 — 微分方程

蘇翕穎

微分方程是現實生活和數學理論間的一個重要溝通橋樑。科學家們爲了預測和模擬未知的實驗結果，將已知的現象，觀察到的數據轉化成數學模型，再藉由數學的理論及方法得到答案並還原成實際現象。也因此微分方程的應用，或者說是需要微分方程的領域，像是電機，土木，航太 … 可說是非成的廣泛。

微分方程的重要性隨著近代人類對新科技探索和重大工程的需求而不斷的加深。在過去的時代，數學家或是工程師只能藉由紙筆來得到答案，但是計算機運算速度以及數值演算法的發展，讓人類對微分方程的數值模擬依賴更加重。從超高摩天大樓到奈米尺寸的微小晶片，從高空的超大新型客機到深海潛水載具等，這些驚人的成就都是科學家藉由各種領域中的方程式搭配電腦不斷模擬後所得到的結果。

由於筆者任職於半導體產業，因此對馬克斯威爾(Maxwell)方程式作較多的應用探討。在馬克斯威爾之前，已有物理大師法拉第提出力線相關的理論，但是他的數學不好，無法用精確的數學來表達確切的物理想法。馬克斯威爾先是用數學來闡述法拉第的思想，接著進一步的推導，並於西元 1865 年發表出“電磁場互相交互的”馬克斯威爾方程組”。一百多年來，科學家們利用這組偉大的方程，針對各種實際狀況的應用，搭配各種不同的邊界條件與簡化理論，在電機領域不斷的蓬勃發展。

儘管計算機及數值方法提升了解題及模擬的速度，但是一些重大的進展及突破仍需仰賴對數學方法的理解。由馬克斯威爾方程組推導出來的格林函數(Green function)，當觀察點與來源點在同一個位置上時，便會出現分母爲零的棘手情況。電機工程師們發現困難已由眼睛看得到，手可以碰觸的實體問題，轉化成數學概念上的問題，他們開始往數學領域探鑽。幸運的是數學家們在應用工程

師們發生問題前已有解答，但是這些利用實變函數論，複變函數論或其他高深數學的方法難道只是解答的過程？工程師們在不斷的反覆思考理解後發現，一個電機困難，透過特殊的數學解題後，往往又是一個新的物理現象的解釋與接踵而來的應用與突破。不少人也因為成功的連結了工程與數學而獲得電機領域的最高榮譽院士(IEEE Fellow)。就像當馬克斯威爾方程應用在通訊領域中的天線理論時，分母為零的現象在過去也許就利用數值方法或是近似公式取得逼近解，但是近年來透過數學理論，工程師們終於了解為何理論與實際測得的數據總是有差距，原來那代表在特殊狀況下才會輻射出去的電磁波。接這便開始有利用此一特性而設計的新型天線。

在當今的高科技半導體產業中，馬克斯威爾方程組推導出來的物理參數：電阻(R)，電容(C)與電感(L)更是不可或缺。IC 晶片設計業者需要晶圓廠提供兩類的參數：電子元件模型，與金屬繞線的參數模型。由於製程已演進至 45 奈米等級，電子元件的電容參數已無法直接量測，必須透過特別設計的測試電路才能得到非常微小物理參數。由於這些重要參數的物理量非常的微小，必須與模擬的結果互相驗證後才能確保正確。所謂的模擬，正是利用各種不同的數值方法，例如有線元素法，有限差分法等去求解各種邊界條件下的馬克斯威爾方程組。另外，金屬繞線的 RC 模型，更是方程組的應用。為了能夠讓 IC 設計者能夠快速的得到設計的模擬結果，晶圓廠必須根據製程的各項物理參數建立龐大又精準的 RC 資料庫。這是一件耗時又困難的工程，越小尺寸的製程，物理參數越多，而設計者對模擬的準確要求也更高。除此之外，電感必須考慮各種不同的操作頻率，讓整個設計與模擬環境變得更加複雜。因此各家電子設計自動化軟體(EDA)廠商都投入大量的人力資源來作出更好的程式，也就是利用更多的數學理論，以及數值方法來快速又正確的解出越來越多條件限制的邊界條件及方程組。其中電感的萃取正是目前各晶圓及電子軟體大廠互相較勁的熱門項目之一。

馬克斯威爾方程組已有一百多年歷史，而科學家利用計算機來求解也發展了四十年。隨著晶圓代工廠，IC 設計業者以及電子設計軟體廠構成的生態圈不斷

的互相刺激與成長，微分方程的應用與影響力也不斷的提升，然而如何快速又準確的求解並不是容易的事情。筆者在攻讀電信工程博士學位時，有一半的時間是在學習如何把實際的電路問題化解成數學方程式，另外一半的時間則是藉由數學的理論與分析，根據實際的邊界條件，找到更精確的格林函數，再以現有的數值求解方法為基礎，發展出全新的演算理論，最後再用撰寫程式碼來驗證成果，並與實作電路量測值還有目前的 EDA 軟體比較精確度與運算速度。

目前在 45 奈米製程，全球前三大 EDA 廠商在物理參數的萃取上皆遇到準確或速度上的缺點，他們也不斷的擴充網羅人力資源以解決現有的難題及因應未來更複雜的計算模擬環境。晶圓代工廠及 IC 設計廠也更需要相關的人才來判斷參數萃取是否合理，並根據這些參數來設計出更有效率的電路。如何從數學橫跨到電子產業，以下是大致相關的科目：數學方面有微分方程，數值分析和複變函數論，這些科目可以幫忙解題。電機方面有高等電磁學，物理數學和電磁數值學，這些科目是解釋實際問題與微分方程之間的關係，以及數學求解過程中代表的物理意義。

數學或是微分方程就像是人的心臟，電機或是工程就像是人的手腳，兩者需互相搭配才能有完美的表現，而一個強壯有力的心臟更能讓人有爆發力的成績。以筆者自身的經驗，在大學學程，應該要專注把數學的邏輯與方法紮實的學好，等到更深入研究時，才有機會把這些知識發揮的淋漓盡致。

作者簡介

蘇芻穎畢業於大學部 85 級，最高學歷為交通大學電信工程博士。目前任職於台灣積體電路製造股份有限公司，設計與技術平台發展處。工作的性質是根據晶圓製程，利用 EDA 軟體產生資料庫，提供 IC 設計者必要的檔案與資訊。工作的價值在於與全球頂尖學府畢業的碩博士人才一起解決先進 IC 在設計，製程及軟體上的困難。