機率測度、隨機變數及分佈函數

蘇南誠(應數博90)

本單元介紹機率測度、隨機變數及分佈函數的概念，其內容主要取材自黃文璋(2003a)第一章第六節和第二章第一至三節。同時提供一些相關例題輔以闡述概念，例題取自黃文璋(2003a)第二章的習題。

詳細內容可參閱下列網站 http://www.math.nuk.edu.tw/cbme/cbme.htm。

觀察一隨機現象，其結果稱為一樣本，所有可能的結果之非空集合稱為樣本空間，通常以Ω表之，而樣本空間的任一子集合稱為一事件。若投擲一骰子，則其樣本空間為$\{1,2,3,4,5,6\}$。令E_1表點數不大於3的事件，即$E_1=\{1,2,3\}$。若出現的點數落在E_1中，我們稱為E_1事件發生，反之則稱為E_1事件未發生。因此若對E_1事件的發生有興趣，自然也得關心E_1的補集之事件，即$E_1^c=\Omega\backslash E_1$。此外，令$E_2$表偶數點的事件，即$E_2=\{2,4,6\}$。有時我們也想知道$E_1\cup E_2$(點數不大於3或為偶數的事件)、$E_1\cap E_2$(點數不大於3且為偶數的事件)之發生。基於此原則，我們可建構事件的集合$\mathcal{F}$。

定義1. Ω之一些(至少一個)子集所形成之集合$\mathcal{F}$稱為一$\sigma-$體，若$\mathcal{F}$滿足

(i) 若$A\in\mathcal{F}$，則$A^c\in\mathcal{F}$;

(ii) 若$A_n\in\mathcal{F}, n=1,2,\cdots$，則$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{F}$且$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{F}$。

由上述二條件不難發現ϕ和Ω皆為$\mathcal{F}$中的元素。

接著要為$\mathcal{F}$中的元素(即事件)定義機率。機率當然不會有負的，而且最大值是1，最小值是0。

定義2. $\mathcal{F}$上之一機率測度P， 為一定義在$\mathcal{F}$上之實值函數，且滿足

(i) $\forall A\in\mathcal{F}, P(A)\geq 0$;

(ii) 若$A_n, n\geq 1$,為互斥事件，則

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)\ ; \tag{1}$$

(iii) $P(\Omega) = 1$。

有了樣本空間Ω，再找出$\mathcal{F}$，最後定出P，這便構成了機率空間，以$(\Omega, \mathcal{F}, P)$表之。

不同隨機現象，其樣本ω可以是可測量的，如身高、體重、收入等，不可測量的如丟銅板的正反面、對某事的贊不贊成等。隨機變數X像一個規則，將隨機現象的結果數字化，即對樣本空間中每一樣本ω，指定一唯一的實數$X(\omega)$與其對應。若X只取可數個值$x_1, x_2, \cdots$，很自然地，對所有的x_i，我們往往想知道X會等於x_i之機率。換句話說，$\{\omega | \omega \in \Omega, X(\omega) = x_i\}$須為一事件，即此集合須屬於$\mathcal{F}$。底下是隨機變數和分佈函數的定義。

定義3. 一機率空間$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上之一隨機變數X，為Ω上之一實值函數，且滿足對$\forall x \in R$, $\{\omega | \omega \in \Omega,\ X(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}$。

定義4. 隨機變數X之分佈函數F為

$$F(x) = P(X \le x) = P(\{\omega | X(\omega) \le x\}),\ x \in R。\tag{2}$$

另外，若存在一非負函數f，滿足

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \tag{3}$$

且對任意$a < b$,

$$P(a < X \le b) = \int_a^b f(x)dx, \tag{4}$$

則X稱為絕對連續的隨機變數。又由上式可得

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy。\tag{5}$$

在上述中，f稱為隨機變數X之機率密度函數(probability density function，簡稱為p.d.f.)。

例 1. 設 X, Y 為 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上之二隨機變數, A 為一事件。令

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega), & \omega \in A, \\ Y(\omega), & \omega \in A^c。\end{cases}$$

試證 Z 為一 r.v.。

解.

$\because X, Y$ are r.v.'s $\therefore \forall x \in R, \{\omega|\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$.

Let $B_z = \{\omega|Z(\omega) \leq z\}, \because \{B_z \cap A\} \subset A \in \mathcal{F},\ \{B_z \cap A^c\} \subset A^c \in \mathcal{F}, \therefore B_z \in \mathcal{F} \Rightarrow Z$ is a r.v.

$\because X, Y$ are r.v.'s, $\therefore \forall x \in R, \{\omega|\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$.

Let $B_z = \{\omega|Z(\omega) \leq z\}$, $B_z = \{B_z \cap A\} \cup \{B_z \cap A^c\}$

$\because \{B_z \cap A\} \subset A \in \mathcal{F}$, $\{B_z \cap A^c\} \subset A^c \in \mathcal{F}$, $\therefore B_z \in \mathcal{F} \Rightarrow Z$ is a r.v..

例 2. 試證下述 F為一 d.f.(稱為 logistic分佈(logistic distribution)), 並求其 p.d.f.。

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-(\alpha x+\beta)}}, x \in R,$$

其中 $\alpha > 0, \beta \in R$為二常數。並證明$f(x) = \alpha F(x)(1 - F(x))$。

解.

(1) (i) $\forall x \in R$, $e^{-\alpha x+\beta} > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1+e^{-\alpha x+\beta}} < 1, \therefore 0 < F(x) < 1, \forall x \in R$

(ii) Let $x_1, x_2 \in R$ and $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) = \frac{1}{1+e^{-\alpha x_1+\beta}} < \frac{1}{1+e^{-\alpha x_2+\beta}} = F(x_2), \therefore F$ is increasing.

(iii) $\because F$ is continuous $\forall x \in R, \therefore F$ is right continuous.

(iv) $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^{-\alpha x+\beta}} = 0, F(\infty) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+e^{-\alpha x+\beta}} = 1$

$\therefore$ by (i), (ii), (iii), (iv), F is a d.f.

(2)

$$f(x) = F'(x) = \frac{-(-\alpha)e^{-\alpha x+\beta}}{(1 + e^{-\alpha x+\beta})^2} = \frac{\alpha e^{-\alpha x+\beta}}{(1 + e^{-\alpha x+\beta})^2}, x \in R$$

(3)

$$\alpha F(x)(1 - F(x)) = \frac{\alpha}{1 + e^{-\alpha x_1+\beta}} \frac{e^{-\alpha x_1+\beta}}{1 + e^{-\alpha x_1+\beta}} = \frac{\alpha e^{-\alpha x+\beta}}{(1 + e^{-\alpha x+\beta})^2} = f(x)$$

參考資料

1. 黃文璋(2003a). 機率論。華泰文化事業公司，台北。

2. 黃文璋(2003b). 數理統計。華泰文化事業公司，台北。