聯合分佈與邊際分佈

洪宛頻(應數博92)

本單元介紹聯合分佈與邊際分佈的概念，其內容主要取材自黃文璋(2003a)第二章第四節，及黃文璋(2003b)第三章第一節。 同時提供一些相關例題，輔以闡述概念。例題取自黃文璋(2003a)第二章習題。

詳細內容可參閱下列網站 http://www.math.nuk.edu.tw/cbme/cbme.htm。

對離散型的隨機向量，令

$$f(x,y) = P(X = x, Y = y),$$

稱為 (X, Y) (或省略括號, 只寫 X, Y)之**聯合機率密度函數**(joint probability density function), 或聯合p.d.f.。有時為了強調是 (X, Y) 之聯合p.d.f., 也可寫成 $f_{X,Y}(x, y)$。

如同單變數的情況，由 (X, Y) 之聯合p.d.f.，可完全決定 (X, Y) 之機率分佈。即對 $\forall A \subset R^2$,

$$P((x, y) \in A) = \sum_{(x,y)\in A} f(x, y)。 \tag{1}$$

由於 (X, Y) 為一離散型的隨機向量，$f(x, y)$ 只對可數個 (x, y)才 不等於0。所以即使 A 包含不可數個點，如 R^2 上一長方形, (1)式的右側，只會是一可數個 $f(x, y)$ 的和。

對離散型的隨機向量 (X, Y)，其聯合p.d.f. $f(x, y)$，要滿足 $f(x, y) \geq 0$，且存在一可數的集合 $C \subset R^2$，使得

$$\sum_{(x,y)\in C} f(x, y) = 1。 \tag{2}$$

反之，若 $f(x, y)$ 為一由 R^2 至 R 的非負函數， 且只有在一可數的集合 C 才不為 0，並滿足(2)式，必為某一**隨機向量** (X, Y) 之聯合p.d.f.。如同單變數的情況，這種 (X, Y) 並不唯一。不同的隨機向量，可以有相同的聯合p.d.f.。

雖然在考慮隨機向量 (X, Y)，但有時會對其中某一變數有興趣。例如， 我們可能想知道諸如 $X = 3$ 之機率。若 (X, Y) 為一隨機向量，則 X, Y 分別為隨機變數。對離散的情況，令$f_X(x) = P(X = x), f_Y(y) = P(Y = y)$, 分別稱為 X 及 Y

之**邊際**(marginal)**機率密度函數**，或說邊際p.d.f.。下述定理給出由聯合p.d.f.來求邊際p.d.f.的方法。

定理 1. 設有離散型隨機向量 (X,Y), 以 $f_{X,Y}(x,y)$ 為其聯合p.d.f.。則

$$f_X(x)=\sum_{y\in R} f_{X,Y}(x,y), \tag{3}$$

$$f_Y(y)=\sum_{x\in R} f_{X,Y}(x,y)\text{。} \tag{4}$$

再來我們考慮**連續型的隨機向量**。一由 R^2 映至 R 的非負函數 $f(x,y)$，若滿足對 $\forall A\subset R^2$,

$$P((X,Y)\in A)=\int\int_A f(x,y)dxdy, \tag{5}$$

便稱為連續型隨機向量 (X,Y) 之聯合p.d.f.。至於 (X,Y) 之邊際p.d.f.，則定義為

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy, -\infty<x<\infty, \tag{6}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx, -\infty<y<\infty\text{。} \tag{7}$$

反之，任一二變數的非負函數 $f(x,y)$, 若滿足

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1, \tag{8}$$

必為某一連續型的隨機向量 (X,Y) 之聯合p.d.f.。如果(8)式中之 $f(x,y)$ 在一有限的區域，例如長方形 $[a,b]\times[c,d]$，其中 $a<b, c<d$, 不為 0, 則(8)式成為

$$\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy=1\text{。}$$

要注意的是，有時候不同的聯合p.d.f., 會導致相同的邊際p.d.f.。 也就是有可能 (X,Y) 與 (U,V) 分佈不同，但 $X\overset{d}{=}U$, $Y\overset{d}{=}V$。

例 1. 設 X_1與 X_2獨立且分別有 $\mathcal{B}e(r_1,s_1)$及 $\mathcal{B}e(r_2,s_2)$分佈。令 $Y_1=X_1$, $Y_2=X_2(1-X_1)$。試求 Y_1,Y_2之聯合 p.d.f.。

解.

$$\begin{cases} y_1=x_1 \\ y_2=x_2(1-x_1)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=y_1 \\ x_2=\frac{y_2}{1-y_1}\end{cases}$$

and

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{y_2}{(1-y_1)^2} & \frac{1}{1-y_1} \end{vmatrix} = \frac{1}{1-y_1}$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{\Gamma(r_1+s_1)\Gamma(r_2+s_2)}{\Gamma(r_1)\Gamma(s_1)\Gamma(r_2)\Gamma(s_2)} x_1^{r_1-1}(1-x_1)^{s_1-1}x_2^{r_2-1}(1-x_2)^{s_2-1}, \quad \begin{array}{l} 0 < x_1 < 1 \\ 0 < x_2 < 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) &= f_{X_1,X_2}(y_1, \frac{y_2}{1-y_1})|J| \\ &= \frac{\Gamma(r_1+s_1)\Gamma(r_2+s_2)}{\Gamma(r_1)\Gamma(s_1)\Gamma(r_2)\Gamma(s_2)} y_1^{r_1-1}(1-y_1)^{s_1-1}(\frac{y_2}{1-y_1})^{r_2-1}(1-\frac{y_2}{1-y_1})^{s_2-1}\frac{1}{1-y_1} \\ &= \frac{\Gamma(r_1+s_1)\Gamma(r_2+s_2)}{\Gamma(r_1)\Gamma(s_1)\Gamma(r_2)\Gamma(s_2)} y_1^{r_1-1}y_2^{r_2-1}(1-y_1)^{s_1-r_2-s_2}(1-y_1-y_2)^{s_2-1} \\ ,0 &< y_1 < 1, 0 < y_2 < 1-y_1 < 1 \end{aligned}$$

例 2. 設 U, V為二獨立之 $\mathcal{N}(0,1)$ r.v.'s, 令 $Z = \rho U + \sqrt{1-\rho^2}V, |\rho| < 1$。

(i) 試求 Z之 p.d.f.。

(ii) 試求 U, Z之聯合 p.d.f.。

(iii) 試求 $X = \mu_1 + \sigma_1 U$及 $Y = \mu_2 + \sigma_2 Z$之聯合 p.d.f., 其中 $\sigma_1, \sigma_2 > 0$。此即二變數之常態分佈。

解.

(i)

$$M_Z(t) = E(e^{tz}) = E(e^{t(\rho u + \sqrt{1-\rho^2}v)}) = E(e^{t\rho u})E(e^{t\sqrt{1-\rho^2}v}) = e^{\frac{t^2\rho^2}{2}}e^{\frac{t^2(1-\rho^2)}{2}} = e^{\frac{t^2}{2}}$$

$\therefore Z \sim \mathcal{N}(0,1),\ f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}},\ \ z \in R$

(ii)

$$\begin{cases} u = u \\ z = \rho u + \sqrt{1-\rho^2}v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = u \\ v = \frac{z-\rho u}{\sqrt{1-\rho^2}} \end{cases}$$

and

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$f_{U,Z}(u,z)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(u^2+(\frac{z-\rho u}{\sqrt{1-\rho^2}})^2)}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(u^2-2\rho uz+z^2)}{2(1-\rho^2)}},\quad u,z\in R$$

(iii)

$$\begin{cases} x=\mu_1+\sigma_1 u \\ y=\mu_2+\sigma_2 z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \\ z=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \end{cases}$$

and

$$J=\begin{vmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} \end{vmatrix}=\frac{1}{\sigma_1\sigma_2}$$

$$f_{X,Y}(x,z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2-2\rho(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})+(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2)}{2(1-\rho^2)}},\quad x,y\in R$$

例 3. 設 X,Y為二獨立之 $\mathcal{U}(0,1)$ r.v.'s。令 $V=(X^2+Y^2)^{1/2}$, $\theta=\tan^{-1}(Y/X)$。試求 V, θ之聯合及邊際 p.d.f.'s。

解. $f_{X,Y}(x,y)=1,\ \ 0<x,y<1$

$$\begin{cases} v=(x^2+y^2)^{1/2} \\ z=\tan^{-1}\frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=v\cos\theta \\ y=v\sin\theta \end{cases}$$

and

$$J=\begin{vmatrix} \cos\theta & -v\sin\theta \\ \sin\theta & v\cos\theta \end{vmatrix}=v,\quad 0<v<\sqrt{2},0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} &f_{V,\theta}(v,\theta)=v,\quad 0<v<\sqrt{2},0<\theta<\tfrac{\pi}{2} \\ &f_V(v)=\textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}vd\theta=\frac{\pi}{2}v,\quad 0<v<\sqrt{2} \\ &f_\theta(\theta)=\textstyle\int_0^{\sqrt{2}}vdv=\frac{1}{2}v^2|_0^{\sqrt{2}}=1,\quad 0<\theta<\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

例 4. 設 X,Y之聯合 p.d.f.為

$$f(x,y)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}x^{\alpha-1}y^{\beta-1}(1-x-y)^{\gamma-1},x,y>0,x+y\leq 1$$

令 $W=X/(1-X),Z=Y/(1-Y)$。試求 W,Z之聯合 p.d.f.。

解.

$$\begin{cases} w = \frac{x}{1-x} \\ z = \frac{y}{1-y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{w}{1+w} \\ y = \frac{z}{1+z} \end{cases}, \quad 0 < w, z < 1$$

and

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{(1+w)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1+z)^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{(1+w)^2(1+z)^2}$$

$$\begin{aligned} f_{W,Z}(w,z) &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}(\frac{w}{1+w})^{\alpha-1}(\frac{z}{1+z})^{\beta-1}(1-\frac{w}{1+w}-\frac{z}{1+z})^{\gamma-1}\frac{1}{(1+w)^2(1+z)^2} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)} w^{\alpha-1} z^{\beta-1}(1+w)^{-(\alpha+1)}(1+z)^{-(\beta+1)}(\frac{1-wz}{(1+w)(1+z)})^{\gamma-1} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)} w^{\alpha-1} z^{\beta-1}(1+w)^{-(\alpha+\gamma)}(1+z)^{-(\beta+\gamma)}(1-wz)^{\gamma-1}, \quad 0 < w, z < 1 \end{aligned}$$

參考資料

1. 黃文璋(2003a). 機率論。華泰文化事業公司，台北。

2. 黃文璋(2003b). 數理統計。華泰文化事業公司，台北。