期望值

許湘伶(應數博93)

本單元介紹變數代換的概念, 其內容主要取材自黃文璋(2003a)第二章第八節, 及黃文璋(2003b)第一章第六節。同時提供一些相關例題, 輔以闡述概念。例題取自黃文璋(2003a)第二章習題。

詳細內容可參閱下列網站http://www.math.nuk.edu.tw/cbme/cbme.htm。

對一隨機變數, 常想粗略地知道其值究竟多大, 期望值(expectation, 或稱 expected value, mean), 以$E(X)$表之, 就是常被拿來扮演這種以一單一的值, 來代表一隨機現象中之變數大小的角色。

隨機變數X之期望值定義如下：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)=\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx & \text{, 連續型,}\\ \sum_x xP(X=x) & \text{, 離散型,}\end{cases}$$

只要積分(或和)存在(即須$E|X|<\infty$)。通常用μ_X(或只以μ)表$E(X)$。

值得注意的是, 當觀測一r.v. X, 不要"期望"會得到$E(X)$。"期望值"可能與每一個結果都不相等。例如, 投擲一公正的銅板, 且令$X=1$或0依出現正面或反面而定, 則$E(X)=1/2$, 不論何時, X必為1或0, 絕不會得到1/2。但1/2可視為長期下來所得到X之平均。底下我們給出幾個關於期望值的相關例子。

例1. 設X有$\mathcal{P}(\lambda)$分佈。試求$E((1+X)^{-1})$。

解：$X\sim\mathcal{P}(\lambda)$, $f(x)=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$。

$$\begin{aligned}
E((1+X)^{-1}) &= \sum_{x=0}^{\infty}(1+x)^{-1}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=\frac{1}{\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x+1}}{(x+1)!}\\
&= \frac{1}{\lambda}\left(-e^{-\lambda}+e^{-\lambda}+\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x+1}}{(x+1)!}\right)\\
&= \frac{1}{\lambda}(-e^{-\lambda}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!})\\
&= \frac{1}{\lambda}(-e^{-\lambda}+1)
\end{aligned}$$

例2. 設二r.v.'s X, Y滿足$P(|X-Y| \le M)=1$, 其中M為一常數。試證若Y之期望值有限, 則X之期望值亦有限, 且$|E(X)-E(Y)| \le M$。

解：令$Z=X-Y$的分佈為$F(z)$,

$$\begin{aligned}
|E(X)-E(Y)| &= |E(X-Y)| = |E(Z)| \\
&\le E(|Z|) \\
&= \int_{|X-Y|\le M} |Z| dF(z) + \int_{|X-Y|>M} |Z| dF(z) \\
&(\text{因為} P(|X-Y|\le M)=1,\ \text{故} P(|X-Y|>M)=0) \\
&\le \int_{|X-Y|\le M} |Z| dF(z) \\
&\le M \int_{|X-Y|\le M} 1 dF(z) \\
&= M \cdot P(|X-Y| \le M) \\
&= M
\end{aligned}$$

故$|E(X)-E(Y)| \le M$。

$$\begin{aligned}
E|X| &= E(|X-Y+Y|) \le E(|X-Y|)+E(|Y|) \\
&\le M + E(|Y|)\ (\text{因為}|E(X)-E(Y)| \le M \text{且} E(|Y|)<\infty) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

因此Y之期望值有限, 則X之期望值亦有限。

例3. 給定一$r>0$, 試舉一隨機變數X, 使得$E(X^r)$存在, 但$E(X^{r+1})$ 不存在。

解：首先

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$$

其中$\zeta(n) = \frac{1}{\gamma(n)} \int_0^\infty \frac{u^{n-1}}{e^u - 1} du$ 是Riemann Zeta function, 且$\zeta(n) < \infty,\ \forall n > 1$。

因為$r>0$, 因此$r+2>1$。令$X \sim f(x) = \frac{1}{\zeta(r+2)} \frac{1}{x^{r+2}},\ x=1,2,3,\ldots$, 則

$$\sum_{x=1}^{\infty} f(x) = \frac{1}{\zeta(r+2)} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^{r+2}} = \frac{\zeta(r+2)}{\zeta(r+2)} = 1,\ \text{且} f(x)>0,\ \forall x \in \mathbb{N}.$$

因此$f(x)$ 為一p.d.f.。再則

$$E(x^r) = \frac{1}{\zeta(r+2)} \sum_{x=1}^{\infty} x^r \frac{1}{x^{r+2}} = \frac{1}{\zeta(r+2)} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{\zeta(2)}{\zeta(r+2)} < \infty,$$

但是

$$E(x^{r+1}) = \frac{1}{\zeta^{r+2}} \sum_{x=1}^{\infty} x^{r+1} \frac{1}{x^{r+2}} = \frac{\zeta(1)}{\zeta(r+2)} \text{ 為發散。}$$

故r.v. $X \sim f(x) = \frac{1}{\zeta(r+2)} \frac{1}{x^{r+2}},\ x = 1, 2, 3, \ldots,$ 其$E(x^r)$存在, 但$E(x^{r+1})$卻不存在。

例4. 將n個球隨機地放進r個盒子中。令$X_i = 1$, 若第i個盒子是空的, 否則$X_i = 0,\ i = 1, \cdots, r$。

(i) 試求$E(X_i)$。

(ii) 對$i \neq j$, 試求$E(X_i X_j)$。

(iii) 令S_r表空盒子的數目, 試求$E(S_r)$及$\mathrm{Var}(S_r)$。

解：

(i)

$$\begin{aligned} P(X_i = 1) &= P(\text{第}i\text{個盒子是空的}) \\ &= P(n\text{個球任意分到剩下的}r-1\text{個盒子}) \\ &= \frac{(r-1)^n}{r^n} \\ \text{則 } E(X_i) &= 1 \cdot P(X_i = 1) + 0 \cdot P(X_i = 0) = \frac{(r-1)^n}{r^n} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} P(X_i = 1,\ X_j = 1) &= P(\text{第}i, j\text{兩個盒子是空的}) \\ &= P(n\text{個球任意分到剩下的}r-2\text{個盒子}) \\ &= \frac{(r-2)^n}{r^n} \\ \text{則 } E(X_i X_j) &= 1 \cdot 1 \cdot P(X_i = 1,\ X_j = 1) + 0 \cdot [1 - P(X_i = 1,\ X_j = 1)] \\ &= \frac{(r-2)^n}{r^n} \end{aligned}$$

(iii) $S_r = \sum_{i=1}^{r} X_i$, 因此

$$E(S_r) = E(\sum_{i=1}^{r} X_i) = \sum_{i=1}^{r} E(X_i) = r \cdot \frac{(r-1)^n}{r^n} = \frac{(r-1)^n}{r^{n-1}},$$

$$\begin{aligned}
Var(S_r) &= Var(\sum_{i=1}^{r} X_i) = \sum_{i=1}^{r} Var(X_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le r} Cov(X_i,\ X_j) \\
&= \sum_{i=1}^{r} [E(X_i^2) - E^2(X_i)] + 2 \cdot \frac{r(r-1)}{2} [E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)] \\
&= r \cdot [\frac{(r-1)^n}{r^n} - \frac{(r-1)^{2n}}{r^{2n}}] + r(r-1)[\frac{(r-2)^n}{r^n} - \frac{(r-1)^{2n}}{r^{2n}}] \\
&\left(\text{因為 } E(X_i^2) = 1^2 \cdot P(X_i = 1) + 0^2 P(X_i = 0) = \frac{(r-1)^n}{r^n} \right) \\
&= \frac{(r-1)^n}{r^{n-1}} - \frac{(r-1)^{2n}}{r^{2n-1}} + \frac{(r-1)(r-2)^n}{r^{n-1}} - \frac{(r-1)^{2n+1}}{r^{2n-2}} \\
&= \frac{1}{r^{2n-1}} [r^n (r-1)^n + r^n (r-1)(r-2)^n - r(r-1)^{2n}]
\end{aligned}$$

參考資料

1. 黃文璋(2003a). 機率論。華泰文化事業公司，台北。

2. 黃文璋(2003b). 數理統計。華泰文化事業公司，台北。