利用的定理: 可解析(可微分)函數的特質

我們來看複變函數論在熱力學中的應用, 我們知道一個均勻材料物體內的熱傳導是由熱方程式決定

$$T_t = k^2 \nabla^2 T,$$

其中 T 是溫度, T_t 是 T 對時間的偏微分. k^2 是一個正的常數. (其數值依照物體的材料而定) 如果該問題是穩定的(也就是說溫度不隨著時間而改變), 且是平面上的二維問題, 此熱方程式可以簡化到二維空間的 Laplace 方程式決定 $\nabla^2 T = T_{xx} + T_{yy} = 0.$

其中 $T(x,y)$ 是熱位能且可爲複數位能 $P(z) = P(x,y)$ 的實部 $P(z) = P(x,y) = T(x,y) + iQ(x,y)$, 在特別情況下, 當 $T(x,y)$ 是一個常數時, 我們稱 $T(x,y)$ 爲等溫線, $Q(x,y)$ 是常數時, 我們稱 $Q(x,y)$ 爲熱流線, 熱量會沿著此曲線由高溫處流往低溫處. 我們之所以要引進複數位能的理由是能像之前應用的問題, 靜電學上的靜電位能是和熱位能基本上在數學上是同樣計算的同質性問題, 我們會用下面問題作解釋.

問題: 在兩個半圓型板 H1, H2 分別具有靜電位能 -1KV 和 1KV 之間的靜電位能函數爲何? 我們如果把-1KV 和 1KV 改成 -10 度和 10 度靜電位能函數就是熱位能函數, 其中數學上的解法是一模一樣的, 當然原本題目中的物理性質如電力等位線就是等溫線, 電力線就是熱流線, 現在要回到我們的問題: 在一個無窮平面板的邊界 $y = x-1, y = x+1$, 分別保持 0 度與 10 度, 求其熱位能和複數位能函數.

解: 因爲熱位能函數滿足 Laplace 方程式且此問題爲二維, 我們可以假設 $T(x,y) = k(y-x) + l$, 其中 k, l 是待求的未知數.

其中假設 $k(y-x)$ 是方便計算因爲邊界是 $y = x-1, y = x+1$. 所以帶入邊界值後 我們可以得到 $T(x, x-1) = k(x-1-x) + l = l - k = 0$ 和 $T(x, x+1) = k(x+1-x) + l = k + l = 10$, 所以可以得到 $k = l = 5$. 所以我們可以得到熱位能函數 $T(x,y) = 5y - 5x + 5$.

複數位能函數則是要找 $Q(x,y)$ 是 $P(x,y)$ 的虛部使得 $P(x,y)$ 爲可解析(可微分)函數. 所以我們有 $\frac{\partial T}{\partial x} = -5 = \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial y} = 5 = -\frac{\partial Q}{\partial x}$. 故此 $Q(x,y) = -5x - 5y + c.$

所以我們得到複數位能函數 $Q(z) = Q(x,y) = 5y - 5x + 5 - i(5x + 5y + c).$

電學上的靜電位能可變成數學上的熱位能, 但在某些情況下, 新的問題可能產生. 例如牽扯到某些在靜電場中, 不具有任何物理意義或實際上雖然沒有任何用處的邊界值條件, 但在熱位能上, 我們卻可以看到實際的問題.

複數分析對工程師和物理學家來說是很有用的工具, 姑且不談此領域當中數學結構的美妙, 光看她在應用數學當中的地位, 似乎是不可取代並且有增無

減, 例如近來物理上的”場論”(Field Theories)研究和黎曼區面的關係.

參考書目:

1.高等數學教材第三卷第二分冊複變函數論 V.I. Smirnov 原著凡異數學譯.
2. Advanced Engineering Mathematics, Erwin Kreyszig 格致圖書公司.
3.高等工程數學及習題詳解(第七版)曉原出版社.
4. Complex analysis, Serge Lang, New York :Springer-Verlag,c1985.
5. Complex analysis, Theodore W. Gamelin, New York :Springer,c2001.