

## 是誰偷吃了我的巧克力?—常態分配

李幸娟(應數博 96)

聖誕節即將到臨了,您是否為您的家人準備好小禮物!是一件優雅保暖的毛衣,還是一盒香甜貼心的巧克力呢?您曾注意過嗎?製造商自動化標準包裝流程所生產的產品(清楚標示內容物各種資訊的標準包裝),其所標示的份量是否誠實可靠?我們以某超商所販賣的 JACQOT 法國松露巧克力為例子,其外盒所標示的重量為  $60 \pm 5$  公克,60 公克即為內容物(巧克力)的平均重量,而 5 公克則為其重量誤差的最大容忍度(tolerance),換句話說,如標準自動化包裝流程為常態分配(註 1)的話,百分之九十九以上的產品其重量應介於 55 公克到 65 公克(一盒),若您多次買到的這項產品都低於 55 公克,那麼就可以到消費者基金會去告狀了。

到底標準包裝物的內容量是如何控制呢?我們用以下這個虛擬的案例來說明:百松食品罐頭製造商接受某經銷商的訂單一批,而此食品裝罐的過程是由電腦自動控制生產線所完成,由於許多原因如溫度(熱脹冷縮),震動(搖晃),磨損(感應不靈)等因素,使用裝罐機器所填充的食品重量為平均重量 1.012 磅,標準差 0.018 磅的常態隨機變數,而該經銷商訂購的每罐食品為 1.00 磅,其容忍度(tolerance)為 0.02 磅,換言之該經銷商只願意購買每罐重量  $1.00 \pm 0.02$  磅之內的食物,如其在 0.98~1.02 磅範圍外就會被退貨。

### 一、首先究竟有多少比例的食品可以被經銷商接受?

設該批食品每罐重量為常態隨機變數  $x$  (單位:磅)則  
平均數  $\mu = 1.012$  (磅), 標準差  $\delta = 0.018$  (磅)  
而生產線生產出經銷商願意接受的產品其機會(機率)為  
 $P(0.98 < x < 1.02)$  將常態分配標準化成  $Z$   
$$= P\left(\frac{0.98-1.012}{0.018} \leq \frac{x-\mu}{\delta} \leq \frac{1.02-1.012}{0.018}\right)$$
  
$$= P(-1.78 < Z < 0.44) \quad (\text{再查表找出機率})$$
  
$$= 0.6325 = 63.25\%$$

即只有 63.25% 的產品會被經銷商所接受(表示此製造商有點遜),為了改進被接受的比例,生產經理與生產線工程師討論該如何調整其食品罐裝容量的平均數與標準差,使得退貨情況得以改善。

### 二、若食品容量平均數可由電腦來調整,它應當調整為若干磅才能使得被接受的比例為最大?

設  $E(x)$  為調整後的平均數,則

$$P(0.98 < x < 1.02) = P\left(\frac{0.98-E(x)}{0.018} < Z < \frac{1.02-E(x)}{0.018}\right)$$

$$= P\left(\frac{1.02-E(x)}{0.018} - 2.22 < Z < \frac{1.02-E(x)}{0.018}\right)$$

由標準常態分配(註 2)的特性知道,左右對稱於  $Z=0$  的機會(機率)為最大

$$\text{令 } \frac{1.02-E(x)}{0.018} - 2.22 = -\left(\frac{1.02-E(x)}{0.018}\right) \quad (\text{所得的比例為最大})$$

$$2\left(\frac{1.02-E(x)}{0.018}\right) = 2.22$$

$$\left(\frac{1.02-E(x)}{0.018}\right) = 1.11 \implies E(x) = 1.02 - 1.11 \times 0.018 = 1.00002$$

可得  $P(0.98 < x < 1.02) = P(-1.11 < Z < 1.11) = 0.733 = 73.7\%$  (查表可知)

所以如將平均重量調整到 1.00002 磅時,廠商可被接受的比例為最大,將會由原先的 63.25% 提高到 73.7%。

**三、**若平均重量無法調整,但可調整標準差,那麼 90% 的產品被接受的最大標準差為多少?

設  $S$  為調整後滿足需求之標準差,則

$$P(0.98 < x < 1.02) = P\left(\frac{0.98-1.012}{S} < Z < \frac{1.02-1.012}{S}\right) = 90\%$$

$$\implies P\left(\frac{-0.032}{S} < Z < \frac{0.008}{S}\right) = P\left(-4 \times \frac{0.008}{S} < Z < \frac{0.008}{S}\right) = 90\%$$

$$\implies \frac{0.008}{S} \doteq 1.282 \quad (\text{由查表得知}) \implies S \doteq 0.00624 \quad (\text{磅})$$

即標準差調降到 0.00624 磅時, 90% 的產品會被經銷商所接受。

生產經理接著考慮相關的生產成本—為了調整母體平均數及降低母體標準差,重新設定機器的成本包括工程師所花的工時及暫時無法生產的工時所須的成本,還有重新設計製程須維修機器的成本等。

**四、**假設降低標準差  $Y\%$ , 需要花費  $150Y^2$  美元, 求算問題三的成本。

$$Y\% = 1 - \frac{0.00624}{0.018} = 65.33\% \implies Y = 65.33$$

$$\text{需要花費成本 } 150 \times Y^2 = 150 \times (65.33)^2 \doteq 640200 \quad (\text{美元})$$

**五、**假設花了 80 美元, 機器被調整至問題二所發現的最佳平均。計算需要降低多少標準差, 才能使得有 90% 的產品被接受。並比照問題四計算個別的成本。假設標準差調整為  $b$

$$P(0.98 < x < 1.02) = P\left(\frac{0.98-1.00002}{b} < Z < \frac{1.02-1.00002}{b}\right)$$

$$= P\left(-\frac{0.02002}{b} < Z < \frac{0.01998}{b}\right) = 90\%$$

$$\therefore -\frac{0.02002}{b} \approx -\frac{0.01998}{b} \Rightarrow \frac{0.01998}{b} = 1.645 \Rightarrow b=0.01215 \text{ (磅)}$$

$$Y\% = 1 - \frac{0.01215}{0.018} = 1 - 67.5\% \Rightarrow Y = 32.5$$

則所需成本為  $80+150 \times (32.5)^2 = 158518$  美元

由此可知將平均重量調為 1.00002, 標準差同時調為 0.01215 所需花費額外成本, 比起只有調整標準差到 0.00624, 減少了四分之三以上, 但一樣可以使經銷商接受百分之九十的產品, 該製造商應該會採用前者, 來改善可被接受的比率, 才是明智之舉。

各位讀者下次有空到便利商店購物時, 不妨留意一下各產品的包裝說明, 再掂掂其斤兩是否有可能偷工減料! 並祝福您買到的商品恰巧是多出最大誤差容忍度的量, 這可是免費撿到的便宜, 機會低於萬分之一! 事實上從這個案例, 可以略窺統計工具在”品質管制”流程上可以扮演的角色, 所以統計學也是生產管理上一門重要的課題。

註 1: 常態分配為對稱於中心點(其中心點恰位於平均數  $\mu$ ), 而標準差為  $\delta$  的鐘形分配。

註 2: 標準常態分配為  $\mu=0, \delta=1$  的常態分配。

#### 參考資料

- [1] 看漫畫學統計(The Cartoon Guide to Statistics, Larry Gonick , Woolcott Smith )  
鄭惟厚譯 天下文化出版
- [2] Business Statistics Understanding Population and Processes ,Mario F. Triola ,  
Leroy A. Franklin, ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, 1996
- [3] Complete Business Statistic. Amir D. Aczel , Jayavel Sounderpandian,  
McGraw-Hill Education, 1989