應數碩 97 羅琳峰

解線性微分方程組

在線性代數中，我們學會用高斯消去法解線性方程組。若遇到聯立線性微分方程組該怎麼辦呢? 這邊將結合線性代數與微分方程去解它，其原理為將矩陣對角化，把聯立的線性微分方程組轉換成個別獨立的線性微分方程組，我們舉下面的例子來說明。

範例:

解線性微分方程組

$$\begin{cases} x_1' &= x_1 + x_2 \\ x_2' &= 2x_2 + x_3 \\ x_3' &= 3x_3 \end{cases}$$ ，其中 $x_1(0)=1,\ x_2(0)=5,\ x_3(0)=10$ 。

解:

將方程組轉成矩陣型態

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ，其等價於 $x' = Ax$ 。

將 A 作對角化，得可逆矩陣 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，對角矩陣 $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

$\therefore x' = Ax = PDP^{-1}x$

令 $y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=P^{-1}x \Rightarrow x=Py$

$$\Rightarrow (Py)'=PDy$$

$$\Rightarrow Py'=PDy$$

$$\therefore \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1=c_1e^{3t} \\ y_2=c_2e^{2t} \\ y_3=c_3e^{t} \end{cases} ,$$

$$\Rightarrow x=Py=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1e^{3t} \\ c_2e^{2t} \\ c_3e^{t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1e^{3t}+c_2e^{2t}+c_3e^{t} \\ 2c_1e^{3t}+c_2e^{2t} \\ 2c_1e^{3t} \end{bmatrix} ,$$

由初始值條件，得

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1+c_2+c_3 \\ 2c_1+c_2 \\ 2c_1 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1=5,\ c_2=-5,\ c_3=1$$

最後我們解出 $\Rightarrow x\begin{bmatrix} 5e^{3t}-5e^{2t}+e^{t} \\ 10e^{3t}-5e^{2t} \\ 10e^{3t} \end{bmatrix}.$

參考書目:

1. Boyce,DiPrima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems *7th Ed.*, John Wiley & Sons, Inc, 2001.