

超音波

源於 1912 年號稱舉世無雙的英國豪華郵輪鐵達尼(Tetanic)號，為爭取藍帶(Blue ribbon)獎，刷新航運紀錄為目的，在大西洋北極行到處女行中，竟然撞上冰山沉沒海底，為前所未有的悲慘海難，導致 2224 名旅客中 1513 人葬身海底。此次悲劇教訓為契機，由英國為首的歐洲國家，普遍展開如何針對防止類似海難重演，探討可資採行的對策。於是興起向海面或海水中輻射超音波，藉以探測浮沉海中冰山和障礙物，用以預防海難發生的研究。

二次世界大戰期間，窮兵黷武的日本軍閥，未遂行其南進政策的侵略野心，不顧民生疾苦，積極展開利用鎳之磁致伸縮效應，從事超音波收發器的研究，因戰敗而中斷。戰敗後為求糧食短缺問題，不得不改弦更張，重新確保蛋白質食物的不致匱乏，能對和平產業技術有所貢獻，於是展開魚群探測器的研發，於 1984 年，終於推出實用化的產品。

由以上的兩個故事，我們可得知超音波的發展，在日新月異下，超音波更廣用於日常生活中，如超音波醫療設備、超音波顯微鏡、超音波焊接設備、超音波加濕吸濕器、浴缸、超音波光電元件，甚至有超音波驅鼠器、害蟲驅逐器等。究竟什麼是超音波，簡單地說，人類

聽覺無法聽到的高頻率音波，即稱為超音波，但嚴格地講，超音波是 20kHz 以上的音波。這邊我們將來介紹如何解波動方程式？將利用到

微分方程中解偏微分方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \dots\dots(1)$$

此 x 方向上傳播的平面波波動方程式 (*wave equation*)， ϕ 速度势能。粒子速度 u 可由以下方程得之，

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} [m/s]$$

如何解(1)? 運用分離變數法，令 $\phi(x,t) = v(x)T(t)$ 代入(1)

$$\begin{aligned} \Rightarrow T(t)v''(x) &= \frac{1}{c^2} v(x)T''(t), \\ \Rightarrow \frac{v''(x)}{v(x)} &= \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\mu^2, \quad \mu > 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} v''(x) + \mu^2 v(x) = 0 \\ T''(t) + c^2 \mu^2 T(t) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

接下來就變成解二階常微分方程，

$$\Rightarrow \begin{cases} v(x) = \text{Cos}(\mu x) \text{ or } \text{Sin}(\mu x) \\ T(t) = \text{Cos}(c\mu t) \text{ or } \text{Sin}(c\mu t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \phi(x,t) &= \text{Cos}(\mu x)\text{Cos}(c\mu t), \text{Cos}(\mu x)\text{Sin}(c\mu t), \\ &\text{Sin}(\mu x)\text{Cos}(c\mu t), \text{Sin}(\mu x)\text{Sin}(c\mu t). \end{aligned}$$

最後再做 $-\frac{\partial}{\partial x}$ 即可得到速度了。

參考書目：

1. 鄭振東編譯, 超音波工程, 臺北市 全華 , 民 88.
2. E. C. Zachmanoglou, Dale W. Thoe, Introduction to partial differential equations with applications, *Williams & Wilkins*, 1976.