應數碩 97 羅琳峰

終結謠言

假設謠言就像傳染病，聽到的人一定要轉告給別人，則謠言的擴散會滿足*Logistic 模型*：

在了解 Logistic 模型之前，先來知道英國經濟學家馬爾薩斯（Malthus）在 1798 年發表的 "人口原理" 中，提出下述人口成長模型：

人口的成長率與總人口數成正比

寫成數學式則為：$P'(t) = \lambda P(t)$，其中 $P(t)$ 表示時間 t 的人口數。

而比利時數學家 Verhulst 在 1840 年修正了馬爾薩斯的人口模型，他認為：

人口之成長不能超過由其地域環境所決定之某最大容量 M

於是提出下面的模型，通稱為 Logistic 模型：

$$P'(t) = \lambda P(t)(M - P(t)), \quad \lambda, \mathrm{M}>0$$

這方程的意思是：在人口相對少時，基本上馬爾薩斯的模型是對的，但當人口相當多時，人口成長率便會趨緩，而且越靠近人口上限 M

時，成長率越小。

範例：現假設在台灣某次選戰中，甲方為求勝選，決定刻意造謠抹黑對方，但為了出奇制勝，決定在選舉前兩天才派人造謠，假設某城市有 2500000 選舉人口，且根據經驗，$\lambda \approx 3\times10^{-6}$。試問：

如果甲方希望能在選舉當天有過半數的人知道這個謠言，他至少必須派出多少人的造謠部隊？

解：

根據 Verhulst 的 Logistic 模型，環境最大容忍量：M=2500000，現在希望找到在 t_0 時刻的 P_0 為多少的時候會使得兩天之後的 $P(t)$ 值大於 1250000？

首先我們先來解 $P'(t)=\lambda P(t)(M-P(t)),\quad \lambda,\ \mathrm{M}>0$

$\dfrac{dP}{dt}=\lambda P(M-P)$，我們將運用微分方程中，分離變數法解之，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{P(M-P)}dP=\lambda dt,\\
&\Rightarrow \int\frac{1}{P(M-P)}dP=\int\lambda dt,\\
&\Rightarrow \frac{1}{M}\int\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{M-P}\right)dP=\int\lambda dt,
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \frac{1}{M}[\ln|P| - \ln|M-P|] + C_1 = \lambda t + C_2,$$
$$\Rightarrow \frac{1}{M}\ln\frac{P}{M-P} = \lambda t + C_2 - C_1,$$
$$\Rightarrow \frac{P}{M-P} = e^{M(\lambda t + C_2 - C_1)} = Ce^{M\lambda t},$$
$$\therefore P(t) = \frac{M}{1 - Ce^{-M\lambda t}}$$

若設初始條件 $P(t_0) = P_0,\ 0 < P_0 < M$ ，則 $P(t) = \dfrac{M}{1 + (\frac{M}{P_0} - 1)e^{-\lambda M(t - t_0)}}$ 。

即找 P_0 使得 $\dfrac{2500000}{1 + (\frac{2500000}{P_0} - 1)e^{-3\times 10^{-6}\times 2500000}} > 1250000$

$\therefore P_0 \approx 1382$ 至少要派 1382 人。

由此可見謠言的力量是多麼可怕了。

參考書目:

1. Boyce,DiPrima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems 7^{th} *Ed.*, John Wiley & Sons, Inc, 2001.