應數碩 97 羅琳峰

絕跡?!

近百年來，科技的進步提升了人們生活品質，而我們在享受這些文明與高科技時，似乎忽略了對環境的關懷，對自然環境肆無忌憚的破壞，氣候變遷、能源危機、生態失衡等問題產生。在此我們將探討生物瀕臨絕種的問題，利用線性動態系統建立數學模型，且分析物種數量的消長，藉以提倡保育的工作。在此我們以台灣候鳥———伯勞鳥為例。

伯勞鳥算是台灣侯鳥中最出名的一種了，因為往年在恆春地區烤小鳥，出售的就是紅尾伯勞，在分類學上牠屬於伯勞科，身長約 18 公分，最明顯的特徵就是在眼睛周圍有明顯的黑色，有如戴上黑眼罩一般，另外該注意的是，雖然叫牠紅尾伯勞，但牠的尾巴僅有些許的紅褐色，並不是整個都是紅色的。伯勞鳥繁殖於西伯利亞東南部、中國大陸東北部、中部和朝鮮、日本，冬季南遷至亞洲中部、南部、東南部、菲律賓、大洋洲等地。從每年九月至次年五月，都可在海拔兩千一百公尺以下，開闊的林園、次森林、農耕地、人工林、灌叢、庭園、都市公園等地看到牠們的蹤跡，尤其是在每年九月秋季過境期間，更有超過上萬隻的大量族群，出現於台灣南端的恆春半島，準備過境菲律賓。其五至七月為繁殖季，親鳥共同築巢於樹上，一般產四

至七枚卵，孵卵期十三至十五天，雛鳥再經十三至十五天離巢，但是初長成的亞成鳥，會待在附近約兩週後才獨立生活，隨後家族會準備南遷。

單一物種模型

我們一開始將去檢驗物種數量如何隨著時間更迭，首先將對存活率、繁殖率作假設，我們用伯勞鳥一例作為我們的主題，但此模型只要經過修改也可適用於其他物種。

我們假設此族群中雄鳥數量與雌鳥數量相等，而每隻雌幼鳥要經過一年才能成熟並有能力繁殖下一代。以下是我們對繁殖率與存活率作的三個假設:

1. 雌鳥每年平均孵化兩隻雌幼鳥，繁殖率 Re=2。
2. 每年只有一半的雌鳥能存活到下一年，雌鳥存活率 FS=$\frac{1}{2}$。
3. 每年只有$\frac{1}{4}$的雌幼鳥能順利長大成熟，雌幼鳥存活率 JFS=$\frac{1}{4}$。

如果起初有 100 隻雌鳥，40 隻雌幼鳥，經過 k 年後全部雌鳥的數量為多少?

解:

設a_k, j_k分別表示雌鳥和幼雌鳥k年後的數量，

所以k年後全部雌鳥的個數　$a_k + j_k$，

由假設 1 $\Rightarrow j_{k+1}=2a_k$

由假設 2、3 $\Rightarrow a_{k+1}=\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{4}j_k$

$$\Rightarrow\begin{cases} a_{k+1}=\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{4}j_k \\ j_{k+1}=2a_k \end{cases},$$

轉為矩陣型態， $\begin{bmatrix} a_{k+1} \\ j_{k+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_k \\ j_k \end{bmatrix}$，

令 $V_k=\begin{bmatrix} a_k \\ j_k \end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\therefore V_{k+1}=AV_k \quad \forall k=0,1,2,\ldots$

運用***線性代數***中，***矩陣對角化***原理

$\Rightarrow$存在一可逆矩陣 P，使得 $P^{-1}AP=D,\ D$ 為對角矩陣，

則我們得到 $P=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow P^{-1}AP=D=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$，

$$\therefore\ V_k=AV_{k-1}=PDP^{-1}V_{k-1}=\ldots=PD^kP^{-1}V_0,\ V_0=\begin{bmatrix} 400 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} a_k \\ j_k \end{bmatrix}=\frac{220}{3}\cdot 1^k\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}-\frac{80}{3}(-\frac{1}{2})^k\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a_k=\frac{220}{3}+\frac{80}{3}(-\frac{1}{2})^k,\ j_k=\frac{440}{3}-\frac{320}{3}(-\frac{1}{2})^k$$

當 k 很大時，$a_k\approx 73,\ j_k\approx 147$，

此數據表示雌伯勞鳥的數量最中呈現穩定狀態。

若 JFS=$\frac{1}{8}$ $\Rightarrow\begin{cases} a_{k+1}=\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{8}j_k \\ j_{k+1}=2a_k \end{cases}$ $\therefore A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

運用同樣方法可得

$a_k=\frac{220}{3}(0.809)^k+\frac{80}{3}(-0.309)^k$, $j_k=\frac{440}{3}(0.809)^k-\frac{320}{3}(-0.309)^k$

當k漸漸變大時，此數據表示雌伯勞鳥的數量會逐漸減少，最後導致絕跡。

參考書目:

1. W.Keith Nicholson, *Linear Algebra with Applications 4th Ed.*, International Edition, 2002.

2. http://hsienwildlife.blogspot.com/2007/05/blog-post_9183.html.