

坐一趟雲霄飛車要花多久時間？

(曲線積分)

趙怡茹(應數博 96)

想必大家都去過遊樂園坐過雲霄飛車，但是如果去的時間是假日的話，排隊的時間真的跟玩設施的時間差非常多，常常遊樂園內的設施沒玩完就該回家了！很掃興。

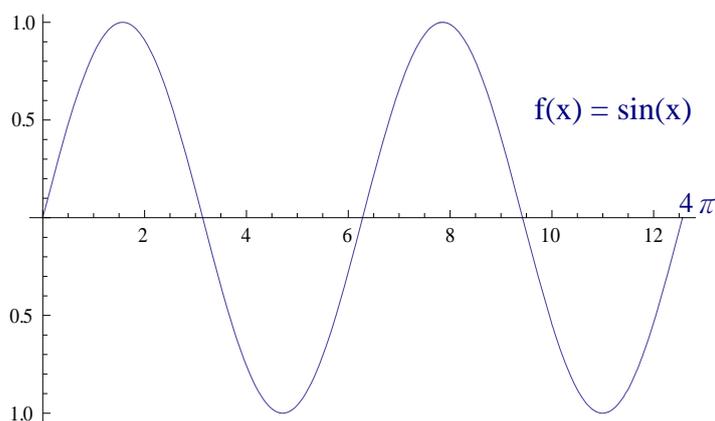
舉個例子來說，運氣好的話，要坐個雲霄飛車排隊排一個小時算是短的，那應該沒人算過，排了一個小時但上去卻只坐了幾分鐘吧！我想可能不到五分鐘吧！屁股都沒坐熱就要準備去排下一個隊伍，但是誰叫我們這麼愛玩呢！只好忍受這些事囉。

那我們就來算看看到底待在上面多久時間。假設雲霄飛車是個簡單的曲線 \sin 函數好了，我們就來算地面上從 0 到 4π 內 \sin 函數有多長。這其實就是微積分上會學到的曲線積分，先來看看什麼是曲線積分。

令 $y = f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的一條平滑曲線， f 在 a 和 b 之間的弧長為 s

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

下面的圖形表示雲霄飛車的軌跡：



$$f(x) = \sin(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos(x)$$

$$\Rightarrow s = \int_0^{4\pi} \sqrt{1 + \cos^2(x)} dx \approx 15.2807$$

當然這個數據並非用手算出來的，現在很多數學軟體都可以用。我們可以利用數學軟體 Mathematica 來幫我們算出這個用手不好算出的積分！

假設在地面的長度為 4π 公尺(約 12.56 公尺)，則我們坐的雲霄飛車實際上卻走了 15.2807 公尺。當然實際上不可能這麼短，而且遊樂園肯定會在上面繞過一圈又一圈，不然那有那麼大的地可以蓋這座遊樂場！

又假設雲霄飛車時速為 100 公里/時，算了一下我們才在上面待了 0.5 秒左右，跟我們所要排隊的時間簡直不能相比。

但是因為大家又愛玩，所以雖然學會曲線積分並不能幫我們減少排隊的時間，但卻可以在排隊的期間內打發掉一點時間！

[參考資料]

1. 'Calculus, seventh edition', Ron Larson, Robert P. Hostetler, Bruce H. Edwards, 2002