

發射火箭

(積分、物理定律)

趙怡茹(應數博 96)

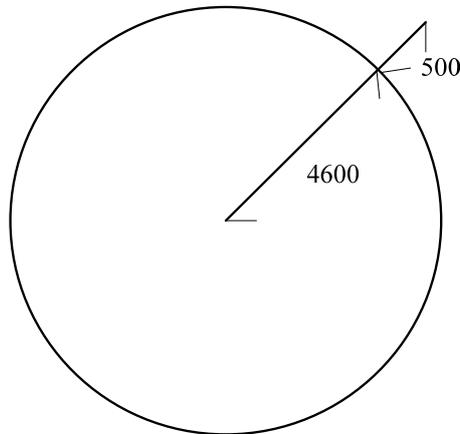
在介紹題目之前，我們先來看看一個物理定律。

牛頓萬有引力定律(Newton's Law of Universal Gravitation)：質量分別為 m_1 和 m_2 的兩個質點之間的引力與 m_1 、 m_2 的乘積成正比，與其距離的平方成反比，也就是

$$F = k \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

式子裡的 m_1 和 m_2 的單位是公克， d 的單位是公分， F 的單位是達因，並且 $k = 6.67 \times 10^{-8}$ 立方公分/克·秒平方。

美國太空總署要發射火箭到太空中，現在有一個火箭在地表時重 20 噸，問一下各位要花費多少功才能將火箭發射至 500 哩的高空中？(假設地球半徑為 4600 哩，忽略一些外力的影響，只考慮在此情況中)



因為火箭在地表時有受到地心引力的影響，所以真正的力的大小與到地心的距離成反比。

$$F(x) = \frac{C}{x^2}$$

在地表 F 為 20 噸，又假設地球半徑為 4600 哩，所以

$$20 = \frac{C}{(4600)^2}, \quad C = 4.232 \times 10^8$$

火箭從 $x=4600$ 哩被推到 $x=5100$ 哩，總共作功為

$$\begin{aligned} W &= \int_{4600}^{5100} F(x) \, dx = \int_{4600}^{5100} \frac{423200000}{x^2} dx \\ &= \left. \frac{-423200000}{x} \right|_{4600}^{5100} \\ &= (-82980.4) - (-9200) \\ &= 9019.6 \text{ 哩} \cdot \text{噸} \end{aligned}$$

用 C-G-S 制 $W \approx 1.2914 \times 10^{11}$ 焦耳。

所以我們要花費這麼多功才能將一部火箭發射到太空中為我們偵查地球上的事，因此為了不要浪費資源，都會先在電腦上模擬一切可能產生破壞的情形之後才去建造火箭，這又是另外一個課題了。

[參考資料]

1. 'Calculus, seventh edition', Ron Larson, Robert P. Hostetler, Bruce H. Edwards, 2002