應數碩 97 林瑋玲

線性聯立方程式

以前我們在國高中時，常常在解有關聯立方程式的應用問題，都是用代入消去法或加減消去法去做求解的。但是隨著線性聯立方程式變數的增加，例如：三元一次線性聯立方程式。用代入消去法或加減消去法去做計算，計算過程會變得複雜，在計算的過程中也容易發生計算上的錯誤，而無法把解正確的求出來。但是如果把三元一次線性聯立方程式用矩陣的方式表式，求解時可以變得簡單。

例如：

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 23 \cdots\cdots\cdots (1)\\
5x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2 \quad \cdots\cdots\cdots (2)\\
2x_1 + 7x_2 - x_3 &= 13 \cdots\cdots\cdots (3)
\end{aligned}
$$

用矩陣來表示

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 5 & -3 & 1 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 2 \\ 13 \end{bmatrix} 。
$$

線性聯立方程式可以運用在很多物理的問題上，可以根據條件來解出答案。而有很多種數值方法可以求解線性聯立方程式。以下就舉其中一種來說明。

用 Jacobi’s Iteration Method 來解上面的聯立方程式。

1. 由(1)-(3)式，判斷x_1項係數中，那一個比較大，將該式調至第一

式。

$$\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2 \ \cdots\cdots\cdots(1) \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 23 \cdots\cdots\cdots(2) \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 &= 13 \cdots\cdots\cdots(3) \end{aligned}$$

2. 再由(2-(3)式，判斷x_2項係數中，那一個比較大，將該式調至第二式。

$$\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2 \ \cdots\cdots\cdots(1) \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 &= 13 \cdots\cdots\cdots(2) \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 23 \cdots\cdots\cdots(3) \end{aligned}$$

3. 把所有x_i項保留在等號的左邊，其餘各項移至等號右邊，得到線性聯立方程式如下：

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.4000 - (0x_1 - 0.6000x_2 + 0.2000x_3) \\ x_2 &= 1.8571 - (0.2857x_1 + 0x_2 - 0.1429x_3) \\ x_3 &= 3.8333 - (0.1667x_1 + 0.3333x_2 + 0x_3) \end{aligned}$$

4. 我們可以把上面的式子，化成 Jacobi 矩陣計算式，

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4000 \\ 1.8571 \\ 3.8333 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.6000 & 0.2000 \\ 0.2857 & 0.0000 & -0.1429 \\ 0.1667 & 0.3333 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

5. 選取初始值 $x_1^{(0)} = 0$，$x_2^{(0)} = 0$ $和$ $x_3^{(0)} = 0$，當平均誤差值小於10^{-6}時，疊代停止。

6. k=1 時

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4000 \\ 1.8571 \\ 3.8333 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.6000 & 0.2000 \\ 0.2857 & 0.0000 & -0.1429 \\ 0.1667 & 0.3333 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 1.8571 \\ 3.8333 \end{bmatrix}$$

平均誤差值=

$$\left(\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| + \left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| + \left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right|\right)/3 = 2.0301 > 10^{-6}$$

7. k=2 時

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4000 \\ 1.8571 \\ 3.8333 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.6000 & 0.2000 \\ 0.2857 & 0.0000 & -0.1429 \\ 0.1667 & 0.3333 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7476 \\ 2.2905 \\ 3.1476 \end{bmatrix}$$

平均誤差值=

$$\left(\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| + \left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right| + \left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right|\right)/3 = 0.4889 > 10^{-6}$$

8. 就這樣一直疊代下去，直到平均誤差值小於10^{-6}停止。

9. 經過 16 次疊代計算後，得到聯立方程式的解為

$x_1 = 1.0000, x_2 = 2.0000,\ x_3 = 3.0000$

所以當變數過多或著複雜的方程式都可以用解聯立方程式的數值方法來解決，當然初始值的選取也會影響疊代的次數。

參考資料：

數值方法入門　一使用 C 語言一　　　陳世芳　陳昭綾 著