應數碩 95 林瑋玲

泰勒展開式

以前高中的時候，都用查表的方式去找出指數函數和三角函數的值，到後來要計算時，都會直接用工程計算機來計算它，當假如我們沒有表和計算機的時候，你知道他們的值是怎麼被求出來的嗎?當你學過微積分和數值分析後就可以知道指數函數和三角函數是怎麼算出來的，我們可以用泰勒展開式來求出指數函數和三角函數的值，但是因為泰勒展開式只是種取其近似值的一種方法，所以他與實際上的值還是存在著些許誤差的。泰勒級數對我們來說是很基礎及重要的，假如沒有它，很多數學的方法和級數就沒有辦法被推導出來。而它可以很廣泛地被使用在許多的領域裡，例如：數學、工程和統計等各個領域。

以下是我舉出的一個例子，讓大家知道學會泰勒展開式是如何運用的。

泰勒展開式（ Taylor series ）

泰勒展開式，是將一個函數以多項式來表示的一種方式。

一多項式函數 $f(x)$，在 $x = a$ 時的泰勒展開式是：

f（x）=$f(a)+\frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)^1+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots+$

$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$

=$\sum\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \text{for } n=1,2,\cdots,\infty.$

而一多項式函數 f（x） 在 x = a 時，n 階的泰勒展開式 $P_n(x)$是：

$P_n(x)$=$f(a)+\frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)^1+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots+$

$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

=$\sum_{j=0}^{n}\sum\frac{(x-a)^j}{j!}f^{(j)}(a).$

範例：$f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 的泰勒展開式.

當 n=1：　$P_1(x)=1+x,$

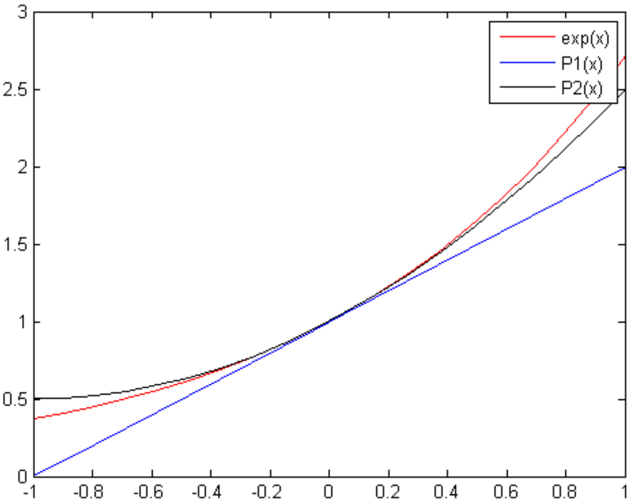
當 n=2：　$P_2(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2,$

因此

$$P_n(x)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n=\sum_{j=0}^{n}\frac{x^j}{j!}.$$

對定值 x 而言，函數的精準度會隨著多項式的次數 n 的增加而增加。

對一個固定次數的多項式而言，精確度隨著 x 離開 x=0 處而遞減。



參考資料：

1. KENDALL ATKINSON AND WEIMIN HAN, ELEMENTARY NUMERICAL ANALYSIS.