

一筆劃

(尤拉問題)

趙怡茹(應數博 96)

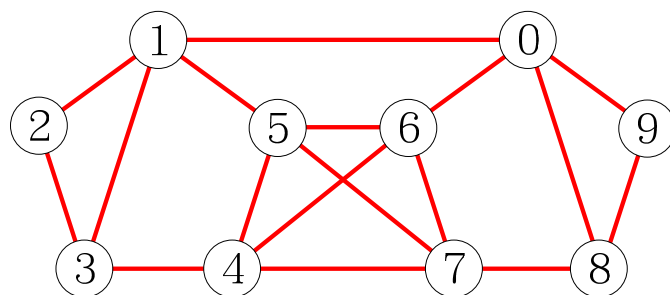
一筆劃問題其實來源為尤拉迴路(或路徑)。在郵差問題中有提到尤拉給的一個結論：

- 一、若一個圖形有尤拉迴路，則其充分必要條件為每個點的邊數為偶數個。
- 二、若一個圖形有尤拉路徑，則其充分必要條件為恰有兩個點的邊數為奇數。更深入來探討，若有兩個點的邊為奇數個，則尤拉路徑必定起於兩點之一，且結束於另一點。

由這個結論我們也可以來玩一筆劃。所謂一筆劃即是給任意一個圖可不可以只用一筆將所有的線畫完而不重複，其中有分為畫回原點與不畫回原點(即尤拉迴路與尤拉路徑)。

1、(不回原點)

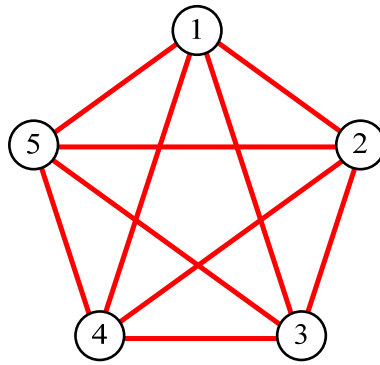
有個選舉候選人想從競選總部沿街拜票到造勢晚會場，請問他的總部跟會場要分別設立在哪裡才可以讓他每一點都拜到票並且走過的路不能再走(即是要將所有路線都只走過一次，點可以重複沒關係)？



Ans：這個圖剛好只有兩個奇頂點(頂點有奇數個邊)，所以由上述的結論二可得知起點與終點必為 3 或 8，所以總部跟會場要設在 3 號或 8 號。下面是其中一個參考走法：
3 → 2 → 1 → 3 → 4 → 5 → 1 → 0 → 6 → 5 → 7 → 4 → 6 → 7 → 8
→ 0 → 9 → 8。

2、(回到原點)

老師出了一個難題給小中，老師問說，可不可以從任意一號走一筆劃回到原來的地方？那又可不可以任選兩點都有一筆劃從一點到另一點？小中實在是想不出來，請大家幫幫小中想想看吧！



Ans：第一個問題的答案是可以的！原因是這個圖形的頂點都是偶頂點，所以一定有尤拉迴路，因此就有一筆劃可以從任一點將這個圖形畫完。給個參考答案，
 $1 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ 。
第二個問題的答案則是不可能有一筆劃從一點到另一點！因為都是偶頂點，所以沒有兩個奇頂點存在，因此與尤拉結論不符合，所以再怎麼找都找不到！

[參考資料]

1. “沒有數字的數學”，徐立行 著, 天下文化
2. “Applied Combinatorics ”, 4ed, Alan Tucker, 2002