國立中山大學應用數學系
高雄區高中數學科資優生培育計畫
九十四學年度　高一班新生甄試

考試日期:　2005.09.24
考試時間:　09:30～11:30

共五題，每題佔20分，滿分100分。答題時，每題都必須寫下題號與步驟。

1. 設n為自然數,證明: $n^2+5n+13$只有在$n=4$時才是完全平方數。

解答：**分析** 可證$(n+2)^2<$ 原式 $<(n+4)^2$

$$n^2+5n+13>n^2+4n+4=(n+2)^2;$$

$$n^2+5n+13<n^2+8n+16=(n+4)^2.$$

由於n是自然數,並且

$$(n+2)^2<n^2+5n+13<(n+4)^2,$$

為了使原式成為完全平方數,必須

$$n^2+5n+13=(n+3)^2$$

$$\text{即}\quad n^2+5n+13=n^2+6n+9,$$

$$\therefore n=4.$$

相反,當$n=4$時

$$n^2+5n+13=49=7^2,$$

確實是完全平方數。

2. 設n為任意自然數,試證

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[8]{8}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2^n}<4.$$

解答：將不等式之左邊化為指數得

$$2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}},$$

令　$y=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n},$　(1)

則　$2y=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}$　(2)

(2)-(1)得

$$y=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}<2\qquad\left(\text{since } 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\cdots+\tfrac{1}{2^{n-1}}<2\right)$$

故　$2^y<2^2=4.$

3. 設數列的前n項的和可表示為$16n^2+12n-1$, 試求此數列第1項,第3項,第5項等等共取m項的和。

解答： 設此數列第n項為a_n,前n項的總和為S_n,當$n\geq 2$,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 16n^2+12n-1-16(n-1)^2-12(n-1)+1 \\ &= 16(2n-1)+12 = 4(8n-1)\text{。} \end{aligned}$$

又, $a_1 = S_1 = 16+12-1 = 27$。

$a_3, a_5, \cdots, a_{2m-1}$構成了

第1項是 $4(8\times 3-1) = 4\times 23,$

最末項是 $4[8(2m-1)-1] = 4(16m-9)$

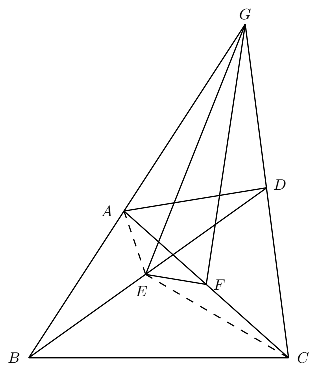
總項數是 $m-1$

的等差數列,於是所求的和是

$$\begin{aligned} a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2m-1} &= 27+\tfrac{(m-1)[4\times 23+4(16m-9)]}{2} \\ &= 27+(m-1)(32m+28) \\ &= 32m^2-4m-1 \end{aligned}$$

4. 設四邊形$ABCD$的邊BA、CD的延長線相交於點G,對角線BD、AC 的中點為E、F,則$\triangle GEF$的面積

$$S_{\triangle GEF} = \frac{1}{4}\text{四邊形}ABCD\text{的面積}$$



解答： $S_{\triangle GEF} = S_{\triangle ECG} - (S_{\triangle ECF} + S_{\triangle GCF})$

由E為BD的中點,所以

$$S_{\triangle ECG} = \frac{1}{2}S_{\triangle GBC} \tag{1}$$

又F為AC的中點,所以

$$S_{\triangle ECF} = \frac{1}{2}S_{\triangle AEC} \tag{2}$$

$$S_{\triangle GCF} = \frac{1}{2}S_{\triangle AGC} \tag{3}$$

把(1)、(2)、(3)代入最初的式子中

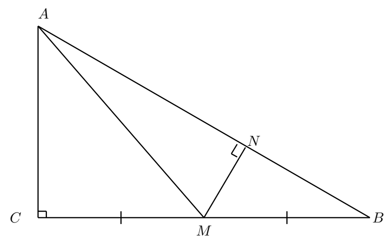
$$\begin{aligned} \therefore \quad S_{\triangle GEF} &= \tfrac{1}{2}[S_{\triangle GBC} - (S_{\triangle AEC} + S_{\triangle AGC})] \\ &= \tfrac{1}{2}\text{四邊形}ABCE\text{的面積} \end{aligned}$$

而E為BD的中點,所以

$$\text{四邊形}ABCE\text{的面積} \quad = \quad \tfrac{1}{2}\text{四邊形}ABCD\text{的面積}$$

故 $\quad S_{\triangle GEF} = \frac{1}{4}$四邊形$ABCD$的面積

5. 若從直角三角形ABC的一邊BC的中點M,作斜邊AB的垂線MN,則$\overline{AN}^2 - \overline{BN}^2 = \overline{AC}^2$。



解答: $\because \quad \angle ANM = \angle R$

$$\therefore \quad \overline{AN}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{MN}^2 \tag{1}$$

又 $\quad \angle BNM = \angle R$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \overline{BN}^2 &= \overline{BM}^2 - \overline{MN}^2 \\ &= \overline{CM}^2 - \overline{MN}^2 \end{aligned} \tag{2}$$

由(1)-(2)得

$$\overline{AN}^2 - \overline{BN}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{CM}^2 = \overline{AC}^2$$

～全卷完～