國立中山大學應用數學系
高雄區高中數學科資優生培育計畫
九十三學年度　高一班新生甄試

考試日期:　2004.10.02
考試時間:　09:30～11:30

共五題，每題佔20分，滿分100分。答題時，每題都必須寫下『題號』與『步驟』，並記得在答案卷上寫上自己的『姓名』及『報名編號』。

1. 求證：$18 < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{99}} < 19$。

   先證$\dfrac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$，再將上式對$k = 2, 3, \ldots, 99$ 求和，即可左邊不等式；為證右邊不等式，先證$\dfrac{1}{\sqrt{k}} < (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$。

2. 計算$\frac{1}{1\cdot5} + \frac{1}{5\cdot9} + \frac{1}{9\cdot13} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$之和。

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1\cdot5} + \frac{1}{5\cdot9} + \frac{1}{9\cdot13} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} \\
= \;& \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right)\right] \\
= \;& \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4n+1}\right) \\
= \;& \frac{n}{4n+1}
\end{aligned}$$

3. 設$z^4 - 2z^3\cos\theta + 2z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$。試求以下各式的值。

   (a) $z + \frac{1}{z}$

   (b) $z^n + \frac{1}{z^n}$ （其中n是整數）

   (a) 顯然，$z = 0$不是給定方程式的根，從而方程兩邊同除以非0的z^2，整理得

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2\left(z + \frac{1}{z}\right)\cos\theta = 0$$

   所以$z + \frac{1}{z} = 0,\ 2\cos\theta$

(b) 當$z+\frac{1}{z}=0$時，$z^2+1=0 \Rightarrow z=\pm i$，所以

$$z^n+\frac{1}{z^n}=(\pm i)^n+(\mp i)^n=\begin{cases} 2 & n\text{為4的倍數時} \\ -2 & n\text{為偶數，但非4的倍數時} \\ 0 & n\text{為奇數時} \end{cases}$$

當$z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$時，

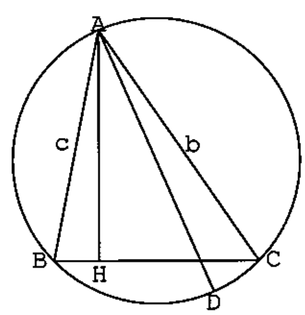
$$\begin{aligned} z^2-(2\cos\theta)z+1 &= 0 \\ z &= \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta-1} \\ &= \cos\theta \pm i\sin\theta \\ &= e^{\pm i\theta} \end{aligned}$$

所以$z^n+\frac{1}{z^n}=e^{\pm in\theta}+e^{\mp in\theta}=2\cos n\theta$。

4. 在半徑為R的圓O中，做內接三角形ABC，如果$AB=c$，$AC=b$，求BC的長。

- 設直徑為AD，高為AH，$AB\cdot AC=AD\cdot AH$，所以$AH=\frac{bc}{2R}$。因此

$$\begin{aligned} BC &= BH \pm HC \\ &= \sqrt{AB^2-AH^2} \pm \sqrt{AC^2-AH^2} \\ &= \frac{1}{2R}(c\sqrt{4R^2-b^2} \pm b\sqrt{4R^2-c^2}) \end{aligned}$$



5. 在邊長為1的正方形內任意放入9個點，則其中至少有3個點，其所圍成的三角形面積不超過1/8。

證明: 用3條平行上下底的直線把此正方形平分成4個矩形，則至少有3個點會落在同一個矩形內。

～全卷完～