幾何淺介

數學是研究數量與空間關係的科學，而幾何作爲數學中的一個分支，是研究空間關係的學科。中學時的〝三角〞則是研究空間與數量之間關係的學科。

經典幾何稱爲歐氏幾何，它起源於紀元前三世紀希臘學者歐幾里德(Euclid)。歐氏幾何是建立在公理基礎上的推理性學科。它的公理是平行線公理：過線外一點向此線做平行線，僅有一條。其他的結論，可由此公理，嚴格推理與證明求得。中學中平面幾何，許多證明習題都屬於這個範疇。

歐氏幾何的公理符合於人們常規認識，所謂〝常規〞是在不太大的空間範圍内。當在大空間範圍内，如在天體運動時，平行線公理，則不成立了。取而代之是**羅氏公理**：過線外一點向此線作平行線至少有兩條。**黎曼公理**：沒有平行線。從而發展成非歐氏幾何。代表的學者是羅拔契夫斯基(N.I,Lobachevsky,1793-1856)，和黎曼(B.Riemann,1826-1866)。

愛因斯坦(Albert Einstein,1879-1955)的相對論，正是藉助於非歐氏幾何發展而來。而牛頓力學則符合於歐氏幾何。

解析幾何是由笛卡爾引入笛卡爾座標所創造。由於有了笛卡爾座標，把研究幾何圖形變成代數，代數是另一個數學分支，它研究數量之間的關係。解析幾何不僅使複雜幾何問題容易解決，而且直接將幾何問題變成數量問題。本課程重點在於：給同學講述解析幾何基礎，它也是大學幾何課程與微分幾何的基礎。

由繪圖，攝影照相，與機械製圖，而發展出來的射影幾何(projective geometry)。正如我們視覺一樣，平行公理不成立了：平行線在無窮遠處相交。代表學者是(Moritz Pasch,1843-1930)。大學工程系有畫法幾何一門課程，投影和透視幾何也可用笛卡爾座標，即用解析幾何來研究。注意，射影幾何可看作一種特殊的歐氏幾何。近代幾何還包括微分幾何，藉助於微積分（分析）和微分方程來研究幾何。因此，數學中的三大支分：分析、代數和幾何，在研究空間形體時有機地結合在一起了。

值得注意，物質和人類都生活在空間和時間内，因此，客觀事物在本質上都有幾何性，而凡事物均有數量和質量。在客觀意義上，幾何與數學不可分。在這裡，我們強調，幾何觀念基礎對於數學及其他自然科學的重要性。

Ⅰ.座標系統

笛卡兒 Descartes Rene (1596-1650)　費爾 Pierre de Fermat (1601-1665)　尤拉 Leonhard Euler (1707-1783)

Descartes (笛卡兒)
我已決心離開那只用來
做心智練習的抽象幾何,
而走進一種解釋自然界
現象的新幾何!

談"座標系統", 我們想起了17世紀的一次幾何學革命: 解析幾何。

解析幾何是利用"座標系統"把幾何圖形化成代數方程式, 再利用方程式的性質來回看其幾何意義。

本節先介紹平面上幾個重要的座標系統: 斜座標系統及極座標系統。

目前爲止, 各位已學過了數線(實數系)、平面上的直角座標系、直線方程式及向量空間(R^n)等觀念, 現在我們試圖用向量空間的觀念來重新介紹數線座標系及平面(或空間) 上斜座標系。另一方面, 我們也介紹一個與距離、角度有關的"極座標"系統。

1.數線座標系：$\{Q;\overrightarrow{QA}\}$

$$\begin{cases} \text{座標原點 } Q, \\ \text{有向線段 } \overrightarrow{QA}. \end{cases}$$

則實數線上任一點 P 之座標 x 是定義成爲

$$\overrightarrow{QP} = x\overrightarrow{QA}.$$

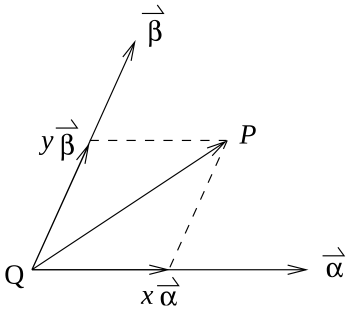
例如:取座標系$(6,\overrightarrow{03})$, 則點 -5 的座標 x 是$(-5-6) = x(3-0)$, 即 $x = \frac{-11}{3}$。

2.斜座標系(平面上)：$\{Q;\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}\}$

$$\begin{cases} \text{座標原點 } Q, \\ \text{不平行兩向量 } \overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}. \end{cases}$$

則平面上任一點P 的座標$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 是定義成爲

$\overrightarrow{QP} = x\overrightarrow{\alpha} + y\overrightarrow{\beta}$



如圖所示(按平行四邊行法則)

例如: 取座標系$\Phi = \left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$, 則點$P = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \end{pmatrix}$ 對於Φ 的座標是 $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, 原因如下:

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

特別地, 當$\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}$ 互相垂直時, 我們稱$\left\{Q;\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}\right\}$ 爲一直角座標系。

注意: 一般所謂的直角座標系乃是取$\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}$ 爲單位向量, 在此稱之爲“標準直角座標系”。

3.極座標系(平面上):

$$\begin{cases} \text{座標原點 } Q, \\ \text{有向線段 } \overrightarrow{QA}. \end{cases}$$

則平面上任一點P 之座標$\begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix}$ 是定義成爲

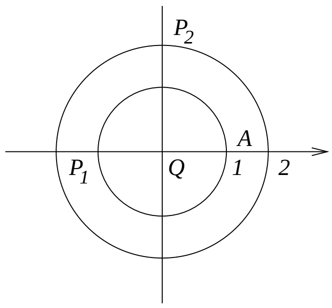
$$\begin{cases} \angle AQP = \theta \ \ (\text{逆時針旋轉 } \overrightarrow{QA} \text{ 到 } QP) \\ |\overline{QP}| = \rho|\overline{QA}| \end{cases}$$

$\overrightarrow{QA}$ 稱爲極軸, θ 稱爲弧角, ρ 稱爲矢徑。

一般所謂的極座標系是取$\overline{OA}$ 爲單位長, 在此我們稱之爲標準極座標系。

例如: 圖示的 P_1 點極座標爲$(1, \pi)$

P_2 點極座標爲$(2, \frac{\pi}{2})$



4.座標變換:

現在我們已經介紹了平面上斜座標系及極座標系, 這使得平面上同一個幾何圖形(如一點) 可以用不同的座標系來描述, 很自然地, 我們想看看不同座標系之間的變換情形。

(1) 斜座標系之間:

例子: $\Phi_1 = \{Q_1; \overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\beta_1}\} \quad \longleftrightarrow \quad P$ 點座標$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

$\Phi_2 = \{Q_2; \overrightarrow{\alpha_2}, \overrightarrow{\beta_2}\} \quad \longleftrightarrow \quad P$ 點座標$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

則$\overrightarrow{Q_1P} = x_1\overrightarrow{\alpha_1} + y_1\overrightarrow{\beta_1} = \overrightarrow{Q_1Q_2} + \overrightarrow{Q_2P} = \overrightarrow{Q_1Q_2} + x_2\overrightarrow{\alpha_2} + y_2\overrightarrow{\beta_2}$

其中, $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ 可表成$a_1\overrightarrow{\alpha_1} + b_1\overrightarrow{\beta_1}$ 或$a_2\overrightarrow{\alpha_2} + b_2\overrightarrow{\beta_2}$; 另一方面, 若

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\beta_1}) &= (\overrightarrow{\alpha_2}, \overrightarrow{\beta_2}) \begin{pmatrix} c & e \\ d & f \end{pmatrix} \\ \text{或} \quad (\overrightarrow{\alpha_2}, \overrightarrow{\beta_2}) &= (\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\beta_1}) \begin{pmatrix} c & e \\ d & f \end{pmatrix}^{-1}, \end{aligned}$$

我們可得"座標"變換關係式爲:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & e \\ d & f \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \\
\text{或} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c & e \\ d & f \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \right), \\
\text{或} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & e \\ d & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(2) 斜座標與極座標之間:

$\Phi_1 = \{Q_1; \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}\} \cdots\cdots P$ 點座標$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Phi_2 = \{Q_2, \overrightarrow{Q_2A}\} \cdots\cdots P$ 點座標$\begin{pmatrix} \theta \\ \rho \end{pmatrix}$

則

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{Q_2P} &= \overrightarrow{Q_2Q_1} + \overrightarrow{Q_1P} = \overrightarrow{Q_2Q_1} + x\overrightarrow{\alpha} + y\overrightarrow{\beta} \\
&= \rho\cos\theta \cdot \overrightarrow{Q_2A} + \rho\sin\theta \cdot \overrightarrow{Q_2B} \\
&= (\overrightarrow{Q_2A}, \overrightarrow{Q_2B}) \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

其中, $\overrightarrow{Q_2B}$ 是由$\overrightarrow{Q_2A}$ 逆時針旋轉$\frac{\pi}{2}$ 弧度所得的向量。

若$\overrightarrow{Q_2Q_1} = (\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $(\overrightarrow{Q_2A}, \overrightarrow{Q_2B}) = (\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}) \begin{pmatrix} c & e \\ d & f \end{pmatrix}$ 則"座標"變換關係式爲:

$$\begin{pmatrix} c & e \\ d & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

特別地, 當$Q_1 = Q_2$, $\overrightarrow{Q_2A} = \overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$ 爲標準直角座標系時,

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \rho \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \text{或} \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

(註:)

一般而言, 我們說到"直角座標系"或"極座標系"是指"標準直角座標系"或"標準極座標系", 且這兩座標系之座標原點重合, 正向x 軸與極軸重合。

※練習題※

1. 對給定點P 之直角座標(或極座標), 求其極座標(或直角座標):

   a. 直角座標 $P(3,6),\ P(4,-5),\ P(-5,3)$

   b. 極座標 $P(5,\frac{\pi}{3}),\ P(6,\frac{3\pi}{2}),\ P(1,\frac{\pi}{3})$

2. 座標平移:

   平面上給定兩斜座標系$\Phi_1=\{Q_1,\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}\},\ \Phi_2=\{Q_2,\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}\}$ 。設任意點P 之座標分別爲$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}_{\Phi_1}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}_{\Phi_2}$

   a. 若$Q_2=\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}_{\Phi_1}$, 試證$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

   b. 若$Q_2=\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}_{\Phi_2}$, 試證$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -7 \\ -8 \end{pmatrix}$

3. 座標旋轉:

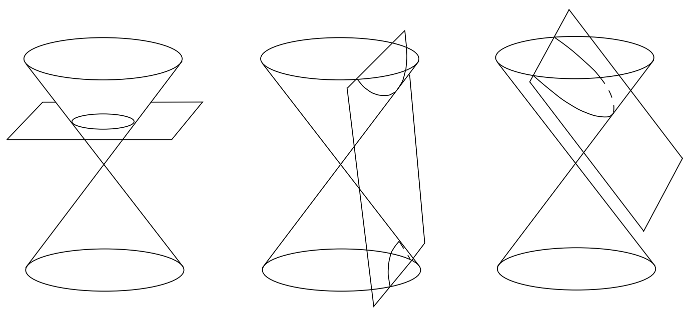
   平面上給定兩座標系$\Phi_1=\{Q;\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\beta_1}\},\ \Phi_2=\{Q,\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\beta_2}\}$ 。設任意點之座標分別爲$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}_{\Phi_1}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}_{\Phi_2}$ 且$(\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\beta_2})=(\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\beta_1})\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$,

   試證$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

II.二次曲線

平面上, 給定一個標準直角坐標系$\{Q;\vec{e_1},\vec{e_2}\}$, 設其相應的座標表示法為$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$。

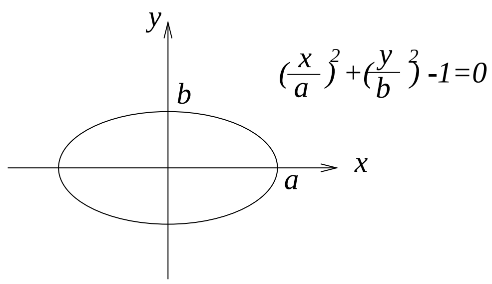
各位已經學過如何用二元一次方程式$ax+by+c=0$ 的解集合(即$\{(x,y)\,|\,ax+by+c=0,\ a,b,c$為給定實數$\}$) 來刻劃平面上的任一直線。今天, 我們想用二元二次方程式$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 的解集合來刻劃平面上的"圓錐截線"。(如圖一所示)。



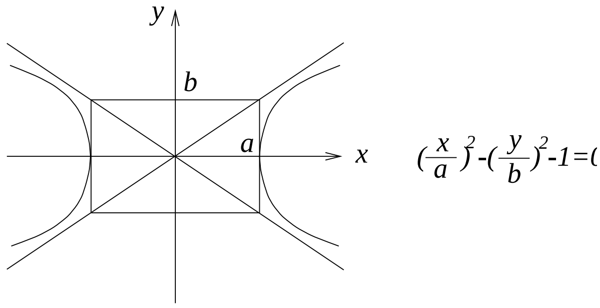
圖一

我們先討論"標準式":

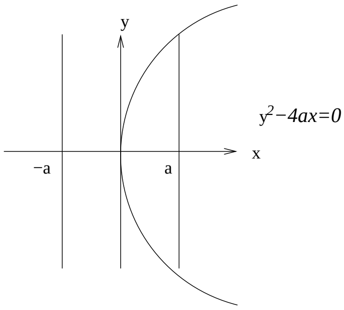
橢　圓: $(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2-1=0$ (圖二)
雙曲線: $(\frac{x}{a})^2-(\frac{y}{b})^2-1=0$ (圖三)
拋物線: $y^2-4ax=0$ (圖四)



圖二



圖三



圖四

然後用座標系的"旋轉" 及"平移" 來刻劃(分類) 所有二元二次方程式的解集合所相應的幾何圖形。

1. 標準式與座標系變換

當給定了標準直角坐標系$\{Q;\vec{e_1},\vec{e_2}\}$, 我們可以利用描點方式畫出方程式

$$(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2-1=0$$
$$(\frac{x}{a})^2-(\frac{y}{b})^2-1=0 \quad 或$$
$$y^2-4ax=0$$

的解集合($\{x,y)\}$) 在平面上的圖形。

一個很自然的問題是: 如果換了另一組標準直角坐標系$\{Q';\vec{e_1}'\vec{e_2}'\}$ (令其相應的點坐標表示法爲$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$), 以上三種"標準"的"幾何圖形"如何用$x'$, y' 的方程式寫出來?。

爲了分類所有二元二次方程式的解集合, "幸運地"我們只需考慮兩種座標系變換: 一爲"旋轉", 另一爲"平移"。這兩種變換已經在上節(座標系統)的練習題中看過了。我們也將延續使用向量表示法來掌握關鍵步驟。

(甲) 標準式與座標系平移

如果另一組座標系爲$\{Q_2'; \vec{e_1}'\vec{e_2}'\}$ 其中$\vec{e_1}' = \vec{e_1}$, $\vec{e_2}' = \vec{e_2}$, $Q_1Q_2 = m\vec{e_1} + n\vec{e_2}$ (即$(\vec{e_1}, \vec{e_2})\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$) 則我們知道座標變換公式可由

$$Q_1P = Q_1Q_2 + Q_2P$$

導出:

$$\begin{aligned}
(\vec{e_1}, \vec{e_2})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (\vec{e_1}, \vec{e_2})\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} + (\vec{e_1}', \vec{e_2}')\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\
&= (\vec{e_1}, \vec{e_2})\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} + (\vec{e_1}, \vec{e_2})\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

亦即

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}。 \tag{1}$$

用(1) 式將三種標準式表爲x', y' 的方程式, 可得到

$$\begin{cases}
\text{橢　圓}: (\frac{x'}{a})^2 + (\frac{y'}{b})^2 + (\frac{2m}{a^2})x' + (\frac{2n}{b^2})y' + (\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} - 1) = 0 \\
\text{雙曲線}: (\frac{x'}{a})^2 - (\frac{y'}{b})^2 + (\frac{2m}{a^2})x' - (\frac{2n}{b^2})y' + (\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2} - 1) = 0 \\
\text{拋物線}: y'^2 - (4a)x' + (2n)y' + (n^2 - 4am) = 0
\end{cases}$$

$\boxed{\text{觀察一}}$: 座標系平移之後, 方程式仍然沒有交錯項$x'y'$, 即交錯項$x'y'$ 的係數仍然是零。

(乙) 標準式與座標系旋轉

如果另一組座標系爲$\{Q_2; \vec{e_1}'\vec{e_2}'\}$ 其中

$$\begin{cases}
(\vec{e_1}', \vec{e_2}') = (\vec{e_1}, \vec{e_2})\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
Q_1 \equiv Q_2
\end{cases}$$

則座標變換公式可由

$$Q_1P = Q_1Q_2 + Q_2P$$

導出

$$\begin{aligned}
(\vec{e_1}, \vec{e_2})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (\vec{e_1}, \vec{e_2})\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (\vec{e_1}', \vec{e_2}')\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\
&= 0 + (\vec{e_1}, \vec{e_2})\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

亦即

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{2}$$

用(2) 式將三種標準式表爲x', y' 的方程式, 可得到

$$\begin{aligned}
&\text{橢　圓:}\ \left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)x'^2+\left(\frac{-\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)x'y'+\left(\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2}\right)y'^2-1=0\\
&\text{雙曲線:}\ \left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}-\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)x'^2+\left(\frac{-\sin^2\theta}{a^2}-\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)x'y'+\left(\frac{\sin^2\theta}{a^2}-\frac{\cos^2\theta}{b^2}\right)y'^2-1=0\\
&\text{拋物線:}\ \left(\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)+\left(\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)x'y'+\left(\frac{\cos^2\theta}{b^2}\right)y'^2-(4a\cos\theta)x'+(-4a\sin\theta)y'=0
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{觀察二}}$: 由上得知, 二次曲線標準式經過座標系旋轉之後, 出現了$x'\,y'$ “交錯項”!

$\boxed{\text{觀察一}}$ 及$\boxed{\text{觀察二}}$ 告訴我們: 二次曲線標準式經過了座標系平移或座標系旋轉或兩種組合變換, 可以將標準式變爲以下的二元二次方程式:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

反之, 我們很自然地想問: 任意一二元二次方程式的解集合圖形是否必爲一橢圓? 或雙曲線? 或拋物線呢?

答案是肯定的。因爲我們可以先經由一座標系旋轉將二次項$Ax^2+2Bxy+Cy^2$ 中的xy 交錯項消去, 再經由座標系平移將一次項消去, 使得任意一二元二次方程式都可變換成二次曲線的標準式! 接著讓我們來看看詳細的作法。

2. 標準化任意二元二次方程式

我們沿用向量及矩陣的技巧來處理二元二次方程式標準化的問題:

任給一二元二次方程式

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

我們首先用座標系旋轉將二次項標準化爲

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2$$

再用座標系平移將一次項併入完全平方項。分述如下:

(甲) 標準化二次項

用矩陣寫法可將二次項改寫成爲

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=(x\,,\,y)\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

我們注意到$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$是個"對稱" 矩陣。一般而言, 我們有

$\boxed{\text{引理}}$: 設A 爲一 2×2 對稱矩陣, 則存在兩定數λ_1, λ_2 及一旋轉矩陣$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 使得A 可對角線化如下

$$A=R_\theta\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}R_\theta^T.$$

在証明(引理) 之前, 讓我們先應用到$Ax^2+2Bxy+Cy^2$ 之標準化問題上, 由引理知道, 存在兩實數λ_1, λ_2, 及一旋轉R_θ 使得

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}=R_\theta\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}R_\theta^T$$

則二次項$Ax^2+2Bxy+y^2$ 可改寫爲

$$(x,y)R_\theta\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}R_\theta^T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3}$$

若令

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=R_\theta^T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

則$(x'\,,\,y')=(x,y)R_\theta$,代入(3) 式得

$$(x',y')\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

即

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2$$

因此, 二次項標準化的可能性是可確定的。

至於如何找λ_1, λ_2 及R_θ 呢?

我們必須從引理的証明中明白:

(引理的証明) :

觀察等式

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = (R_\theta)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}(R_\theta)^T \tag{4}$$

並利用矩陣的特性:

$$\begin{cases} (1) \quad \det(M\,N) = \det M \cdot \det N \\ (2) \quad \operatorname{trace}(M\,N) = \operatorname{trace}(N\,M) \\ (3) \quad R_\theta^T = R_\theta^{-1} \end{cases}$$

我們得到

$$\begin{cases} AC - B^2 = \lambda_1\lambda_2 \\ A + C = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \tag{5}$$

即λ_1, λ_2 爲方程式

$$x^2 - (A+C)x + (AC - B^2) = 0$$

的根。亦即

$$\frac{(A+C) \pm \sqrt{(A+C)^2 - 4(AC - B^2)}}{2}$$

化簡得

$$\frac{(A+C) \pm \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}{2}$$

此乃是兩實根λ_1, λ_2。

接下來, 求算$R_\theta =$? 我們可展開(4) 式, 利用(5) 式消去λ_1, λ_2 而得到

(a) 當$\sqrt{(A-C)^2 + 4B^2} \neq 0$,

$$\begin{cases} \sin 2\theta = \frac{2B}{\sqrt{(A-C)^2+4B^2}} \\ \cos 2\theta = \frac{A-C}{\sqrt{(A-C)^2+4B^2}} \end{cases}$$

(b) 當$\sqrt{(A-C)^2 + 4B^2} = 0$, 亦即

$$\begin{cases} A - C = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

已是標準式, 不必找旋轉矩陣!

引理証畢。

(註)：在線性代數理論中, 任意對稱(實數) 矩陣$A_{n\times n}$ 都可以對角線化成$A=S_{n\times n}D_{n\times n}S^T_{n\times n}$, 其中$S^T=S^{-1}$, D 爲對角線矩陣。D 的對角線元素稱爲“固有值”, S 的n 個行向量稱爲“固有向量”。

(乙) 標準化一次項

任給一二元二次方程式(不含交錯項)

$$Ax^2+By^2+2Dx+2Ey+F=0$$

我們只要用觀察法湊合成x, y 的完全平方項, 也就是經過一座標系平移可得之改寫爲

$$mx'^2+ny'^2+0+0+l=0$$

或

$$mx'^2+0+0+2Ey+l=0$$

或

$$0+ny'^2+2Dx+0+l=0$$

便完成了標準化的步驟。

總結(甲) 及(乙), 我們便完成了對任意二元二次方程式之解集合圖形的分類: 橢圓, 雙曲線或拋物線。

3. 標準二次曲線的幾何性質

我們將在下節討論平面幾何時再研究二次曲線中一些有趣的幾何性質。

※練習題※

判別下列二次曲線的圖形

1. $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 6x - 18y + 2 = 0$

2. $4x^2 - 4xy + y^2 + 4x + 6y - 3 = 0$

3. $3x^2 - 2y^2 - 6x - 10y + 2 = 0$

4. $xy + x + 4 = 0$

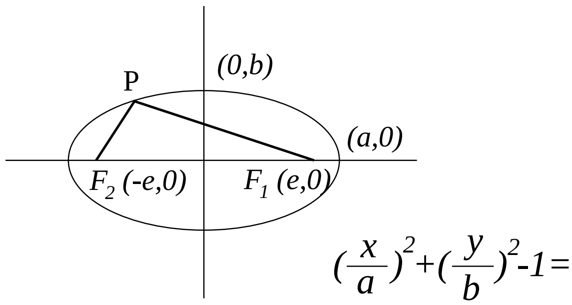
Ⅲ.平面幾何

一般而言, “平面幾何”指的是只能用直尺及圓規畫出來的平面圖形(點集合)。各位在國中的時候已經練習過一些點集合之間的(位置)關係, 例如: 平行, 垂直, 相交, 相切, 相割, 全等三角形, 相似形, 夾角, 軸對稱, 心對稱, 內接圓, 外切圓, 面積求算等等。

本節要探討的是如何用圓規及直尺畫出二次曲線。

想法: 在“解析幾何”可用方程式來描述二次曲線之前, 古希臘Menaechmus 及Apollonius of Perga 早已熟悉所謂的圓錐截線(即橢圓、雙曲線、拋物線)以及它們的性質了。今天, 我們想用倒敘法先看二次曲線標準式, 再來理解其作圖的原理。

一、橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$



首先, 假設$a>b$, 令$e=\sqrt{a^2-b^2}$ $(<a)$, 則點$F_1(+e,0)$, $F_2(-e,0)$ 稱爲其“焦點”, 且橢圓對稱於$\overline{F_1F_2}$ (x 軸)及$\overline{F_1F_2}$ 之垂直平分線(y 軸), 故對稱於原點, 原點稱爲此橢圓之“對稱中心”, 當$b<a$ 時, a 稱爲長軸, b 稱爲短軸。設P 爲橢圓上的任一點,

有幾種作圖法。我們僅介紹細線作圖法:

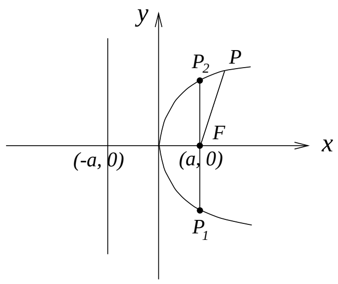
計算$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}$, 可得:

$$\begin{aligned}
& \|(x-e,y)\|+\|(x+e,y)\| \\
= & \sqrt{(x-e)^2+y^2}+\sqrt{(x+e)^2+y^2} \\
= & \frac{1}{a}\sqrt{(xe-a^2)^2}+\frac{1}{a}\sqrt{(xe+a^2)^2} \qquad (\because \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0) \\
= & \frac{1}{a}(a^2-xe)+\frac{1}{a}(a^2+xe) \qquad (\because x<a,\ e<a) \\
= & \frac{1}{a}(2a^2) \ = \ 2a
\end{aligned}$$

這個特性使得我們了解所謂的“細線作橢圓法”(圖一)。
將一條全長爲$2a$ “軟”細線的兩端固定在兩給定點(將成爲橢圓之焦點) F_1, F_2, 用筆將細線勾開, 並在保持細線拉緊情形中移動筆尖, 則可畫出一個以F_1, F_2 爲焦點, 長軸爲a 的橢圓了。

接著上節課的“想法”, 我們來看拋物線與雙曲線的作圖原理。此外, 我們也介紹二次曲線的極座標表示式。

二、拋物線 $y^2 - 4ax = 0$



容易檢驗拋物線對稱於x 軸, 兩者之交點(原點)稱爲頂點。$F(a,0)$ 稱爲焦點, 直線$l = \{(-a,y)|y \in \mathcal{R}\}$ 稱爲準線。令$P(x,y)$ 表拋物線上的任一點, 計算$|\overline{PF}|$, 可得:

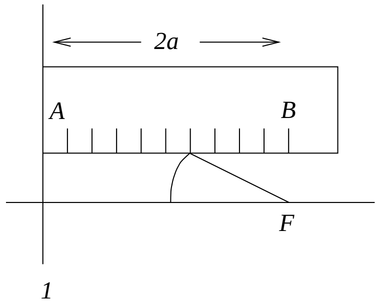
$$\begin{aligned}
|\overline{PF}| &= \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} \\
&= \sqrt{(x+a)^2} \qquad (\because y^2 - 4ax = 0) \\
&= x + a \qquad (\because x > 0)
\end{aligned}$$

若將$(x+a)$ 重寫成$x-(-a)$, 我們可以解釋爲P 點到準線l 的(水平)距離。因此, 拋物線的特性就是平面上與一定點及一定直線等距離的所有點的軌跡! 其中, 過F 點(焦點)且平行於準線的直線交拋物線P_1, P_2, 而得一弦$\overline{P_1P_2}$ 稱爲正焦弦, 其弦長爲$4a$。而半正焦弦長$2a$, 即$|\overline{P_1F}|$ (或$|\overline{P_2F}|$) 的長度, 或焦點到準線的距離, 具有特殊角色, 我們會再詳談。

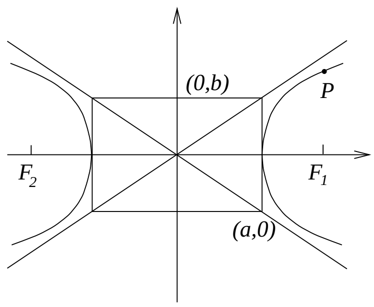
現在, 我們介紹

- 細線作圖法:

給定拋物線的焦點F 及半正焦弦長$2a$, 我們取一條全長爲$2a$ 的細線及一直尺, 取直尺上兩點A, B (如圖), 使得$|\overline{AB}| = 2a$, 將細線兩端固定在B 點及F 點(當$x \le a$ 時),用筆尖將細線勾直並使得筆尖落在線段$\overline{AB}$ 上, 將直尺窄面沿準線上下滑動, 則可畫出拋物線。



三、雙曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$



容易檢驗雙曲線對稱x 軸、y 軸及原點, 曲線與x 軸(焦點所在的直線)之交點稱爲頂點, 頂點與對稱中心(原點)的距離稱爲頂心距(即a)。令$e = \sqrt{a^2 + b^2}$, 點$F_1(e, 0), F_2(-e, 0)$ 稱爲焦點, 令P 是雙曲線右半曲線, 計算$\overline{PF_1}, \overline{PF_2}$ 如下:

$$\begin{aligned} |\overline{PF_1}| &= \sqrt{(x-e)^2 + (y-0)^2} \\ &= \sqrt{(ex-a^2)^2}/a \qquad (\because \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0) \\ &= (ex - a^2)/a \qquad (\because e > a,\ x > a) \end{aligned}$$

同理,

$$|\overline{PF_2}| = \sqrt{(x+e)^2 + (y-0)^2} = (ex + a^2)/a$$

因此,

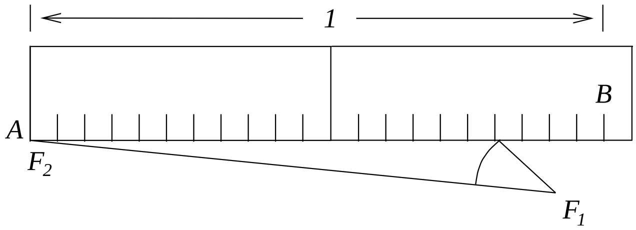
$$|\overline{PF_2}| - |\overline{PF_1}| = 2a$$

換句話說, 雙曲線$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ 是與二定點F_1, F_2 的距離差額爲$2a$ 的所有點的軌跡。

這樣的特性, 給出了

- 細線作圖法:

給定雙曲線的兩焦點及頂心距a, 我們取一直尺及其上二點A, B, 使$|\overline{AB}| = l > 2a$, 另取一全長爲$l - 2a$ 的細線, 使其兩端固定於B 點及F_1 點, 同時使A, F_2 點重合並固定之, 再用筆尖勾緊細線, 使筆尖落在$\overline{AB}$ 線段上, 繞A(即F_2) 點旋轉直尺, 則可畫出相應的雙曲線了。



四、二次曲線與極座標系統

現在, 我們要展覽一下極座標系統對於二次曲線的貢獻:
取橢圓(拋物線或雙曲線)的一焦點爲極座標系統的原點(極點),

1.橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

取焦點$(e, 0)$ 爲極座標原點, 正向x 軸爲極座標零(角度)方向, 則橢圓上任意點$P(x, y)$ 的極座標(r, θ) 滿足

$$\begin{cases} x - e = r\cos\theta \\ y - 0 = r\sin\theta \end{cases}$$

將此代入標準式中, 再藉等式$a^2 - b^2 = e^2$ 化簡, 可得

$$r = \frac{b^2}{e\cos\theta + a} \qquad (\because a > e)$$

式改寫爲

$$r = \frac{\left(\frac{b^2}{a}\right)}{\frac{e}{a}\cos\theta + 1}$$

這樣子的改寫方式有下面的幾何意義:

(甲) 分子$\frac{b^2}{a}$ 這是“半正焦弦長”, (正焦弦是通過焦點並垂直長軸的弦)

(乙) 分母中$\frac{e}{a}$ 稱爲離心率, 一般記爲ε, 橢圓正是(平面上)與一定點(F_1)及一給定直線的距離比值爲ε 的所有點的軌跡(請與拋物線的作圖法比較)。(註:此時$\varepsilon = \frac{e}{a} < 1$)

2.拋物線 $y^2 - 4ax = 0$

取焦點(F) 爲極座標原點(極), $\overrightarrow{FV}$ 爲其零(角度)方向(V 爲頂點), 則拋物線上任一點$P(x,y)$ 的極座標(r,θ) 滿足

$$\begin{cases} x-a=r\cos\theta \\ y-0=r\sin\theta \end{cases}$$

將此代入標準式中, 並化簡之, 可得

$$r=\frac{2a}{1+\cos\theta}$$

我們注意到分子$2a$ 也是半正焦弦長, 而分母相應於離心率的因子是“1”, 讓我們重寫拋物線的作圖法原理:拋物線是(平面上)與一定點(F) 及一給定直線的距離比值爲$\varepsilon=1$ 的所有點的軌跡。

3.雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$

取焦點$F_1(e,0)$ 爲極點, $\overrightarrow{F_1V}$ 爲零(角度)方向(V 爲較接近F_1 的頂點), 則拋物線上任一點$P(x,y)$ 的極座標(r,θ) 滿足

$$\begin{cases} x-e=r\cos\theta \\ y-0=r\sin\theta \end{cases}$$

將式代入標準式中, 並化簡之, 可得

$$r=\frac{b^2}{e\cos\theta+a}$$

式改寫爲

$$r=\frac{\left(\frac{b^2}{a}\right)}{\frac{e}{a}\cos\theta+1}$$

這等式與橢圓的極座標方程式的型式完全一樣, 其中$\frac{b^2}{a}$ 也是半正焦弦長, $\varepsilon=\frac{e}{a}$ 也稱爲離心率但$\varepsilon>1$ (橢圓$\varepsilon<1$, 拋物線$\varepsilon=1$)。而且雙曲線正是(平面上)與一定點(F_1) 及一給定直線的距離比值爲ε 的所有點的軌跡!

總結而言, 二次曲線的極座標方程式都可寫成

$$r=\frac{P}{\varepsilon\cos\theta+1}$$

其中P 爲半正焦弦長, ε 爲離心率。
該注意的是我們的極座標系統的選取方法!!

※練習題※

1. 給定直角座標系中兩點$F_1(1,4)$, $F_2(2,5)$ 及一實數4, 試畫一橢圓, 使其焦點爲F_1, F_2, 長軸爲4。

2. 直角座標系中, 給定兩實數3、8, 試畫一橢圓, 使其對稱中心爲原點且長軸爲8, 短軸爲3。

3. 試作滿足極座標方程式
$$r = \frac{4}{2\cos\theta + 3}$$
的圖形。

4. 試證明任一雙曲線是平面上與一定點及一給定直線的距離比值恆爲某定數$\varepsilon(>1)$ 的所有點的軌跡。

5. 試證明任一橢圓是平面上與一定點及一給定直線的距離比值恆爲某定數$\varepsilon(<1)$ 的所有點的軌跡。

IV.立體幾何

1.空間直線與平面

爲了簡單起見，僅討論直角座標系 XYZ （圖1）

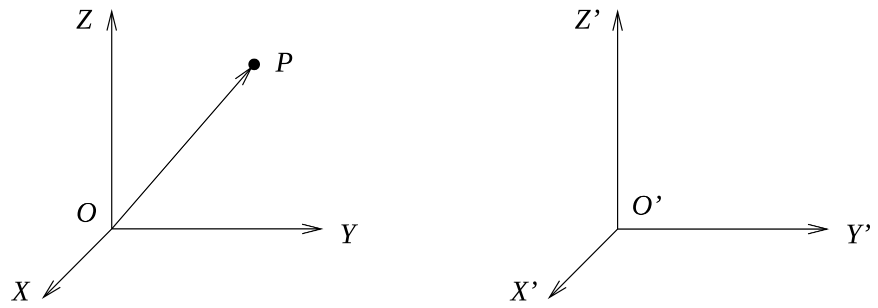


圖1　直角座標系

在 XYZ 座標上一點 $P(x,y,z)$ 也是向量 $\overrightarrow{OP}$ 的終點。它可用單位座標向量$\vec{i},\vec{j}$ 和 $\vec{k}$ 之線性組合來表達

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

其中 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 是沿座標軸 X,Y,Z 的單位向量。在本節也假設$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ 。當單位向量 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 不同，或用空間的斜座標系，我們可參照第 I 節討論。又兩直角座標之間平移和旋轉也可作類似討論。

空間兩點 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 之間的距離爲

$$P_1P_2 = |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

通過 P_1 和 P_2 作一直線。記 M 爲直線 P_1P_2 上一點（圖2），

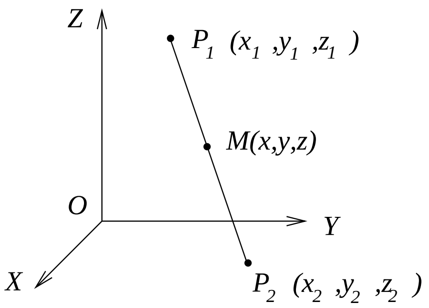


圖2　直線段 P_1P_2

因此，

$$\frac{MP_1}{P_2P_1} = \lambda$$

同座標差成比例，得到

$$\lambda = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{6}$$

這裡 $\lambda \in [0,1]$ 。當 $\lambda \in (-\infty,\infty)$ ，得到過 P_1 和 $P_2(P_1 \neq P_2)$ 的直線方程式

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

在三維直角座標中，一個曲面由顯式 $z = f(x,y)$ 或隱式 $F(x,y,z) = 0$ 來表示。因而兩曲面的相交曲線則由方程組的解來表達。

$$\begin{aligned} F_1(x,y,z) &= 0 \\ F_2(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

現在討論空間平面表示法。設平面有法線向量$\overrightarrow{n}$ ，在平面上任一直線$\overrightarrow{MM}$ 。必與該平面法線向量$\overrightarrow{n}$ 垂直（圖3）。

$$\begin{aligned} O &= \vec{n}\cdot\overrightarrow{MM_0} = \vec{n}\cdot(\vec{r}-\overrightarrow{r_0}) \\ &= A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n} &= A\vec{i}+B\vec{i}+C\vec{i} \\ \overrightarrow{MM_0} &= (x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}+(z-z_0)\vec{k}. \end{aligned}$$

我們得到平面的點法式表示法

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

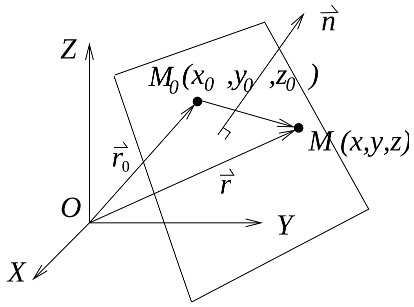


圖3　平面的點法式

或

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{8}$$

其中

$$D=-(Ax_0+By_0+Cz_0).$$

其次當平面與 x,y,z 軸之交點爲 a,b,c 時，它的截距式表示法爲 (圖4)

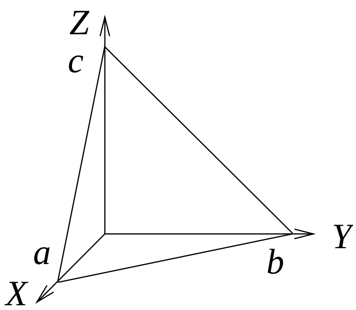


圖4　平面的截距式

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad 其中 \quad a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0.$$

直線可以用兩平面的交線來表達，由 (8) 得

$$
\begin{aligned}
A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\
A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \qquad (9)
\end{aligned}
$$

當兩平面之法線向量

$$\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1) \qquad 與 \qquad \overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$$

不平行，則相交直線存在，即方程 (9) 有唯一解。

2.向量在軸上的投影，投影定理

首先考慮空間一點 A 在一向量 $\overrightarrow{u}$ 上的投影。我們可構造一個垂直平面通過點 A 並與向量 $\overrightarrow{u}$ 垂直，而此垂直平面與 $\overrightarrow{u}$ 之交點 A' ，則 A' 記爲點 A 在向量 $\overrightarrow{u}$ 上的投影 (圖5) 。

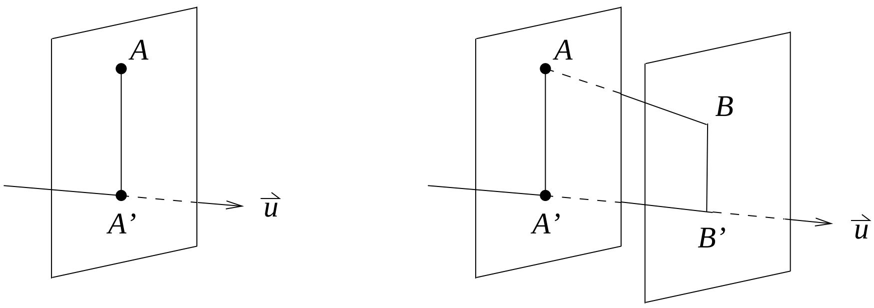


圖5　點與向量在軸 $\overrightarrow{u}$ 上的投影

因此空間一線段 $\overline{AB}$ 在 $\overrightarrow{u}$ 上的投影爲線段 $\overline{A'B'}$ ：

$$A'B' = Pu\overrightarrow{AB}$$

$\overrightarrow{u}$ 稱爲投影軸。我們有下面兩個定理：

<u>定理1</u> 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在任何軸 u 上的投影等於向量模乘以軸與向量間的角 φ 的餘弦。

$$Pu\overrightarrow{AB} = |AB| \cos\varphi$$

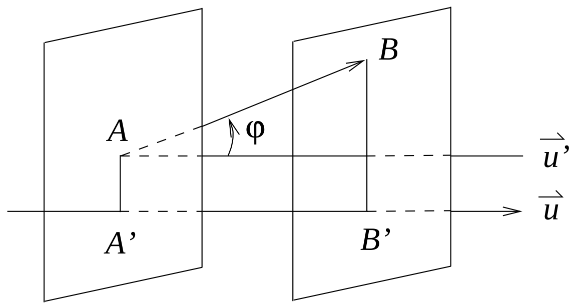


圖6　向量 $\overrightarrow{AB}$ 與 u 之夾角

<u>證</u>：通過向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起點 A ，引軸 $\overrightarrow{u'}$ 平行於 $\overrightarrow{u}$ ，且有相同方向，則軸 $\overrightarrow{u}$ 和向量 $\overrightarrow{AB}$ 間的角 φ ，等於軸 $\overrightarrow{u'}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 的角，則有 (見圖6)

$$Pu\overrightarrow{AB} = Pu'\overrightarrow{AB}$$

但

$$Pu'\overrightarrow{AB} = |AB|\cos\varphi,$$

所以

$$Pu\overrightarrow{AB} = |AB|\cos\varphi.$$

證畢。

由 $\cos\varphi$ 的正負值可知，一向量與其投影軸成銳角時，向量投影爲正，成鈍角時，爲負；成直角時則爲零。由定理 1 推得，相等的向量在同一軸上的投影相等。

<u>定理2</u> 有限個向量的和在任何軸上的投影等於各個向量在同一軸上投影的和，即

$$Pu(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = PuA_1 + PuA_2 + \cdots + PuA_n.$$

<u>證</u>：取兩個向量 A_1, A_2 爲例，設 $\overrightarrow{u}$ 爲投影軸，並做折線 $\widehat{ABC}$ 使得

$$\overrightarrow{AB} = A_1, \qquad \overrightarrow{BC} = A_2.$$

折線 $\overrightarrow{AC}$ 可表爲 (見圖7)

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = A_1 + A_2.$$

設 A,B,C 在軸 u 上的投影分別爲 A',B',C' ，則

$$Pu\overrightarrow{AB}=A'B',\qquad Pu\overrightarrow{BC}=B'C',\qquad Pu\overrightarrow{AC}=A'C'.$$

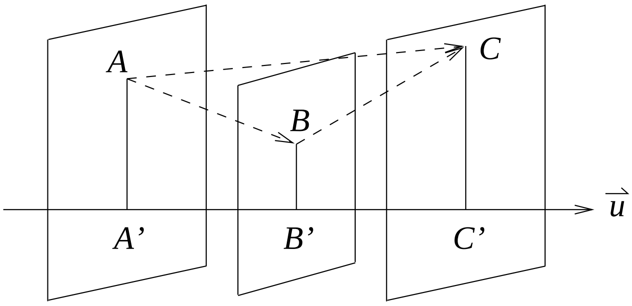


圖7　向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{u}$ 上的投影

因 $A'B'+B'C'=A'C'$ ，所以

$$Pu\overrightarrow{AB}+Pu\overrightarrow{BC}=A'B'+B'C'=A'C'=Pu\overrightarrow{AC}.$$

即

$$PuA_1+PuA_2=Pu(A_1+A_2).$$

類似可證當 n 是有限的，有

$$PuA_1+PuA_2+\cdots+PuA_n=Pu(A_1+A_2+\cdots+A_n).$$

證畢。

3.空間二次曲面

空間平面由 x,y,z 之線性函數(即一次式)來表示，而空間二次曲面則由x,y,z 之二次式來表達。下面，我們便介紹幾種最常見的二次曲面。

4.旋轉曲面

設在 YOZ 平面上，已知一曲線 L ，它的方程爲

$$f(y,z)=0.$$

把這一曲線繞 Z 軸旋轉，得到一個以 OZ 軸爲軸的旋轉曲面（見圖8）。因爲點 M_1 繞 Z 軸旋轉保持距離不變，有

$$0=f(y,z)=f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z),$$

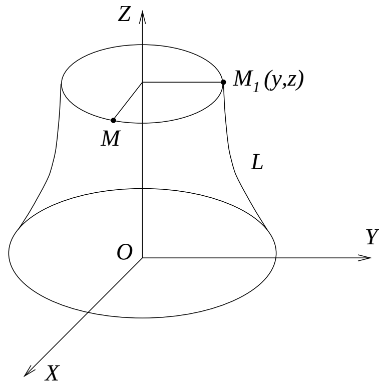


圖8　旋轉曲面

其中正與負號由 y 之符號來確定： $y\Rightarrow\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 。同理，曲線 $L:f(y,z)$ 繞 y 軸，所以其曲面方程爲 $f(y,\pm\sqrt{x^2+y^2})=0$ 。

例1 繞 x 軸旋轉一橢圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}=1.$$

所得的曲面方程是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{c^2}=1.$$

若以同一橢圓繞 y 軸旋轉，則所成的曲面方程是

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

這兩種曲面都叫做旋轉橢球面。

5.橢圓球面

標準方程爲(見圖9):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{10}$$

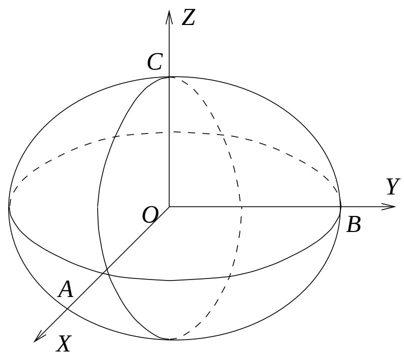


圖9　橢球面

由 (10) 知

$$\frac{x^2}{a^2}\leq 1,\quad \frac{y^2}{b^2}\leq 1,\quad \frac{z^2}{c^2}\leq 1.$$

則

$$|x|\leq a,\quad |y|\leq b,\quad |z|\leq c.$$

爲了研究橢球面的形狀,考查橢球面座標面及其平行平面所截的截痕(即相交曲線)。當 $XOY(z=0), XOZ(y=0), YOZ(x=0)$,方程 (10) 成爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

這些曲線正是我們在前兩節學過的橢圓線。

其次,用平行於 XOY 的平面 $z=h<c$,截橢球面,由 (10) 得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}.$$

或

$$\frac{x^2}{a^2(1-\frac{h^2}{c^2})}+\frac{y^2}{b^2(1-\frac{h^2}{c^2})}=1.$$

此橢圓的半軸爲

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2-h^2}, \qquad \frac{b}{c}\sqrt{c^2-h^2}.$$

當 $h=\pm c$ 時， $\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}=0$ ，截痕縮爲兩個點 $(0,0,\pm c)$ 。當 $|h|>c$ 時，截面與橢圓不相交，無解。

同理，用平行於其他平面截此橢球面，截痕的結論類似。

當 $a=b>c$ ，則由 (10) 式得到橢圓旋轉面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

它由橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 繞短軸旋轉曲線，叫偏旋轉橢球面。

當 $a>b, b=c$ ，由 (10) 式得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$

它由橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 繞長軸旋轉而成旋轉面，叫長旋轉橢圓面。

若 $a=b=c$ ，則 (10) 式爲球面

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

這裡原點爲球心， a 爲球面的半徑。

6.單葉雙曲面

由方程

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} &= 1,\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} &= 1,\\ -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} &= 1.\end{aligned}$$

所確定的面叫單葉雙曲面。其中 a, b, c 叫做雙曲面的半軸，我們將研究（見圖10）

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{11}$$

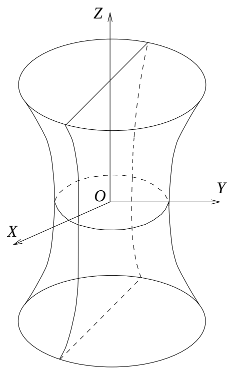


圖10　單葉雙曲面

用座標面以及平行平面所截得之截痕來討論

(i) 由 $XOY(z=0)$ 截曲面 (11) 得橢圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

半軸爲 a 及 b ，平行於 XOY 的平面 $z=h$ 截曲面 (11) 得到另一橢圓曲線

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}.$$

半軸爲 $\frac{a}{c}\sqrt{c^2+h^2}$ 與 $\frac{b}{c}\sqrt{c^2+h^2}$。

(ii) 平面 $XOZ(y=0)$ 截曲面 (11) 的截痕是一雙曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

它的實軸與 x 軸相合，虛軸與 z 軸相合，半軸爲 a 與 c 。平行於平面 XOZ 的平面 $y=h(h\neq\pm b)$ 截曲面 (11) 的截痕也是雙曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}, \tag{12}$$

它的半軸的 $\frac{a}{b}\sqrt{b^2-h^2}$ 與 $\frac{c}{b}\sqrt{b^2-h^2}$ ，方程 (12) 有如下三種情形：

(a) 若 $h^2<b^2$ ，則雙曲線的實軸平行於 x 軸，虛軸平行於 z 軸。

(b) 若 $h^2>b^2$ ，則雙曲線的實軸平行於 z 軸，虛軸平行於 x 軸。

(c) 若 $h^2=b^2$ ，則方程 (12) 爲

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

即

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0, \qquad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0.$$

這表示平面 $y=b$ 截此雙曲面得到一對相交於 $(0,b,0)$ 的直線，同理平面 $y=-b$ 截此雙曲線所得的截痕爲一對相交於點$(0,-b,0)$ 的直線。

(iii) 平面 $YOZ(x=0)$ 和平行於平面 YOZ 的平面截曲面 (11) 的交線也是雙曲線，而平面 $x=\pm a$ 截曲面 (11) 也得到兩條相交直線。若 $a=b$ ，則 (11) 變爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

它爲雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 繞虛軸旋轉而成的旋轉面，叫做單葉旋轉雙曲面，它被平面 XOY 或其平行平面所得的截痕都是圓。

7.雙葉雙曲面

由方程

$$\begin{aligned}
-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} &= -1,\\
\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} &= -1,\\
\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} &= -1.
\end{aligned}$$

所確定的曲面叫做雙葉雙曲面，我們只研究（見圖11）

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1. \tag{13}$$

其曲面形狀如示

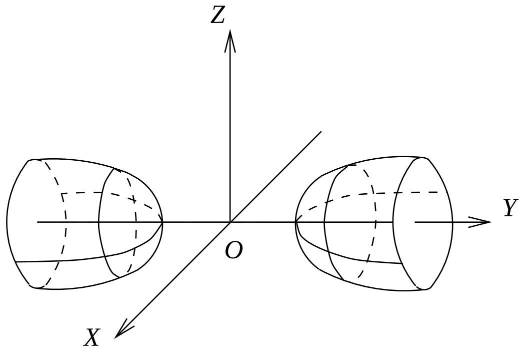


圖11　雙葉雙曲面

(i) 平面 $XOZ(y=0)$ 與雙曲面不相交，因爲當 $y=0$ 下方程無解。

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

平行於平面 XOZ 時平面 $y=h$ 只能在 $|h|\geq b$ 的情形下才能與曲面 (13) 相交。令 $y=h$ 並代入 (13) 中得

$$\frac{x^2}{a^2(\frac{h^2}{b^2}-1)}+\frac{z^2}{c^2(\frac{h^2}{b^2}-1)}=1. \tag{14}$$

(a) 若 $h^2<b^2$ ，無解。

(b) 若 $h^2>b^2$ ，方程 (14) 表示一個橢圓，其半軸爲$\frac{a}{b}\sqrt{h^2-b^2}$ 及 $\frac{c}{b}\sqrt{h^2-b^2}$ 。

(c) 若 $h^2=b^2$ ，則由方程 (14) 得到

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=0.$$

其解爲 $x=z=0$ 因此曲面 (13) 與兩平面 $y=\pm b$ 分別相交於兩點 $(0,\pm b,0)$ ，此兩點爲雙曲面的頂點。

(ii) 座標面 $XOY(z=0)$ 截 (13) 的截痕都是雙曲線，它的實軸與 Y 軸方向一致，虛軸與 Z 軸方向一致。若 $a=c$ ，則方程 (13) 變成

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=-1.$$

此方程表示由一個雙曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

繞實軸旋轉而成的旋轉曲面，它叫做雙葉旋轉雙曲面，它和平面$y=h(|h|>b)$ 的截痕都是圓。

8.雙曲拋物面

由方程

$$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \qquad (p,q\,\text{同號}). \tag{15}$$

所確定的曲面叫做雙曲拋物面或鞍形曲面（見圖12）。

設 $p>0, q>0$ ，我們考查曲面 (15) 與座標面以及其平行面的截痕。

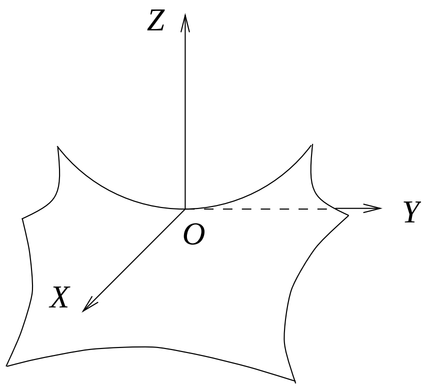


圖12　雙曲拋物面（即鞍形曲面）

(i) 座標 $XOY(z=0)$ ，截 (15) 得到相交於 $(0,0,0)$ 的兩直線

$$\frac{x}{\sqrt{2p}}+\frac{y}{\sqrt{2q}}=0, \qquad -\frac{x}{\sqrt{2p}}+\frac{y}{\sqrt{2q}}=0.$$

平行於 XOY 面的平面 $z=h$ 截 (15) 得到雙曲線

$$-\frac{x^2}{2ph}+\frac{y^2}{2qh}=1.$$

(a) 當 $h>0$ ，它的實軸與 x 軸平行。

(b) 當 $h<0$ ，它的實軸與 z 軸平行。

(ii) 用座標面 $XOZ(y=0)$ 截 (15) 得到拋物線

$$x^2=-2pz.$$

它的軸與 z 軸相合。平行於 XOZ 面之平面 $y=\pm h$ 截 (15) 得到拋物線

$$x^2=-2p(z-\frac{h^2}{2q}),$$

它的軸平行於 Z 軸，頂點爲 $(0,h,\frac{h^2}{2q})$。

(iii) 座標面 $YOZ(x=0)$ 及平行平面 $x=\pm h$ 截 (15) 都是拋物線，它的軸與 z 軸平行。

※練習題※

1. 對一個空間直角座標，經過平行、放大（或縮小）以及旋轉後形成另一空間直角座標。給出點 P 座標在兩直角座標系之間的關係。

2. 空間一點可以看成三個平面的交點，寫出方程組並討論交點的存在與唯一性。

3. 若向量 $\overrightarrow{OM}$ 與座標軸 OX, OY, OZ 的正方向間夾角依次爲 α, β, γ ，證明

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

4. 在 XOZ 上有一雙曲線

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

寫出它繞 x 與 z 軸形成的雙曲旋轉面。

5. 橢圓拋物面的方程爲（見圖13）：

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z \qquad (p, q \text{ 同號}) \tag{16}$$

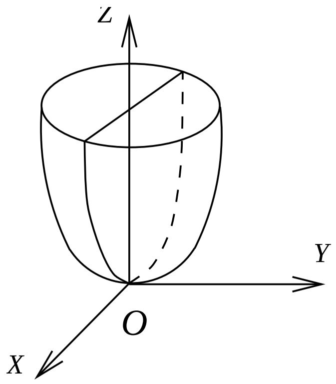


圖13　橢圓拋物面

試用座標面以及平行面截 (16) 所得之截痕討論截痕的形狀。

6. 二次錐面，由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{17}$$

所定義。畫出它的空間錐面形狀，並用座標面及其平行面相切的方法討論曲面 (17) 截痕。