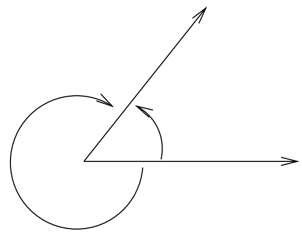
三角函數與複數

一、有向角及其角度

每一個角是由共有一端點的兩條射線所構成，此兩射線稱爲此角的兩邊，而它們共有之端點稱爲此角的頂點。一個有向角$\angle A$ 的兩邊中，有一邊稱爲始邊，另一邊稱爲終邊。若由$\angle A$ 的始邊繞頂點旋轉至終邊的方向是逆時針方向，則稱$\angle A$ 爲正角，若爲順時針方向，則稱$\angle A$ 爲負角。習慣上，若無特別指明，我們將以直角座標平面的原點爲任一有向角的頂點，且以x 軸的正向爲任一有向角的始邊。



正角的角度爲正數，負角的角度爲負數。例如，在x 軸正向任選一點X ，自$\vec{OX}$ 逆時針方向繞原點旋轉一周回到$\vec{OX}$ ，則得一個角度爲$360°$ 的正角，若旋轉兩周，則角度爲$720°$ 。若旋轉方向爲順時針方向，則旋轉一周時角度爲$-360°$ ，旋轉兩周時角度爲$-720°$ 。以此類推，對於每一個實數r ，均可找到一個有向角使其角度爲$r°$。

角的測量單位，除了“度”之外，尚有“弧度”單位，也稱爲“弳度”單位。在直角座標平面上，以原點爲圓心，做一個半徑爲1的圓，稱爲單位圓。若一有向角的終邊與$\vec{OX}$ 在單位圓上所夾的弧長爲1，則稱此角爲1弧度或1弳度。設一有向角的角度爲$\alpha°$ 且爲θ 弧度，因其終邊與$\vec{OX}$ 在單位圓上所夾之弧長爲$\frac{|\alpha|}{360}\times 2\pi=\frac{\pi}{180}|\alpha|$ ，則

$$\theta=\frac{\pi\alpha}{180},\quad 即\quad \frac{\theta}{\pi}=\frac{\alpha}{180}。$$

常見的一些特別角的角度如下：

度	0	30	45	60	90	120	135	150	180
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

當討論三角函數時，角度的單位並無直接關係，但習慣上，若無特別指明，均以弧度爲角度單位。因此使用時，並不寫明角度單位。例如，$\angle A=30$ 是指$\angle A$ 爲30弧度，並非$30°$。

由以上的討論，很容易得：

[定理1.1] 若一扇形的半徑爲r ，中心角爲θ ，則此扇形的面積爲$\frac{1}{2}r^2\theta$ ，且中心角所對之弧長爲$r\theta$。

二、三角函數的定義與圖形

在這一節，將定義任一有向角θ 的三角函數值。設θ 之終邊與單位圓的交點座標爲(a,b) ，則定義

$$\cos\theta = a \quad 且 \quad \sin\theta = b$$

由此定義直接得：

$$|\cos\theta| \le 1, \quad |\sin\theta| \le 1 \quad 且 \quad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

例

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

始邊與終邊均重疊的任意兩個有向角稱爲同界角。若θ 爲一個有向角，則其所有同界角爲$\theta + 2n\pi$ ，其中n 是整數，且由定義得

$$\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta \quad 且 \quad \sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta.$$

定義： 設f 爲一函數，若存在實數$p \neq 0$ 使得$f(x+p) = f(x)$ 對任意x 均成立，則稱f 爲一個週期函數，而p 稱爲f 的一個週期。若p_0 是f 之所有週期中的最小正數，則稱p_0 是f 的主週期。

例 ：正弦和餘弦函數均爲週期函數，主週期均爲2π。

[**定理2.1**] $\cos(-\theta) = \cos\theta, \quad \sin(-\theta) = -\sin\theta$

證明： 設θ 的終邊交單位圓於點P ，且$-\theta$ 的終邊交單位圓於點P'。因爲P 與P' 對稱於x 軸，則$\cos(-\theta) = \cos\theta$ 且$\sin(-\theta) = -\sin\theta$。

[**定理2.2**] $\cos(\theta+\pi) = \cos(\theta-\pi) = -\cos\theta, \quad \sin(\theta+\pi) = \sin(\theta-\pi) = -\sin\theta$

證明： $\cos(\theta+\pi) = \cos(\theta-\pi+2\pi) = \cos(\theta-\pi)$，同理$\sin(\theta+\pi) = \sin(\theta-\pi)$。設$\theta$ 之終邊交單位圓於點P ，而$\theta+\pi$ 之終邊交單位圓於點P' 。因爲原點是P 與P' 的中點，所以$\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta, \quad \sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$。

[**定理2.3**] $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta, \quad \cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\sin\theta, \quad \sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos\theta, \quad \sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = \cos\theta$

證明： 由sin 與cos 的週期性，只需考慮$0 \leq \theta < 2\pi$ 的情形。

首先設$0 \leq \theta < \pi$ ，當$\theta = 0$ 時，顯然成立。當$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 時，點$(\cos(\frac{\pi}{2} - \theta), \sin(\frac{\pi}{2} - \theta))$ 與點$(\cos\theta, \sin\theta)$ 對稱於直線$y = x$，所以$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta, \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$，且

$$\begin{aligned}
\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) &= \cos(\pi - \frac{\pi}{2} + \theta) = -\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = -\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = -\sin\theta \\
\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) &= \sin(\pi - \frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta
\end{aligned}$$

當$\pi \leq \theta < 2\pi$ 時，令$\alpha = \theta - \pi$。則$0 \leq \alpha \leq \pi$ 且

$$\begin{aligned}
\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) &= \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha - \pi) = \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha = -\sin(\theta - \pi) = \sin\theta \\
\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) &= \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha - \pi) = -\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\cos\alpha = \cos\theta
\end{aligned}$$

仿$0 \leq \theta < \pi$ 之討論可得，$\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin\theta$ 且$\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos\theta$。

現在定義其它四個三角函數如下：

$$\begin{aligned}
\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} &\qquad \text{當} \cos\theta \neq 0, \text{即當} \quad \theta \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, \\
\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} &\qquad \text{當} \sin\theta \neq 0, \text{即當} \quad \theta \neq n\pi, \\
\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} &\qquad \text{當} \theta \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, \\
\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} &\qquad \text{當} \theta \neq n\pi,
\end{aligned}$$

其中n 是任意整數。由定理2.1，定理2.2及定理2.3得：

[**定理2.4**]

(1) $\tan(-\theta) = -\tan\theta, \quad \cot(-\theta) = -\cot\theta, \quad \sec(-\theta) = \sec\theta, \quad \csc(-\theta) = -\csc\theta$

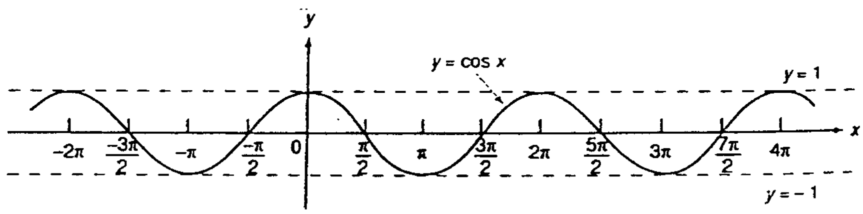
(2) $\tan(\theta + n\pi) = \tan\theta, \quad \cot(\theta + n\pi) = \cot\theta, \quad \sec(\theta + 2n\pi) = \sec\theta, \quad \csc(\theta + 2n\pi) = \csc\theta$，即正切和餘切是主週期爲$\pi$ 的週期函數，而正割和餘割是主週期爲2π 的週期函數。

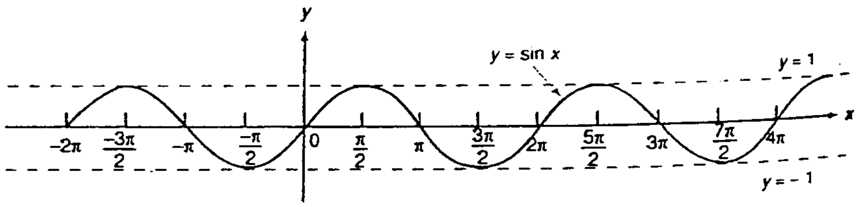
(3) $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta, \quad \cot(\frac{\pi}{2} - \theta) = \tan\theta, \quad \sec(\frac{\pi}{2} - \theta) = \csc\theta, \quad \csc(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sec\theta$

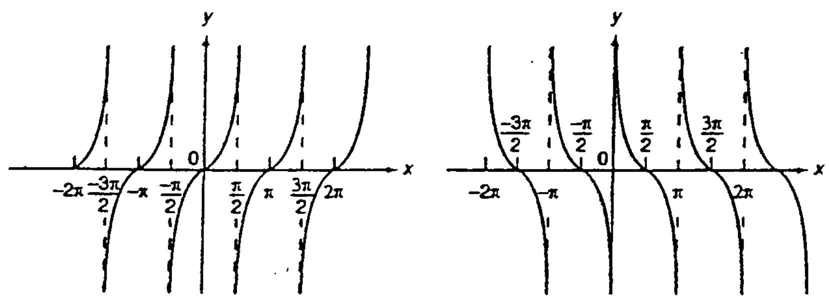
當設θ 爲一有向角，若其終邊位於第k 象限($k = 1, 2, 3$或4) ，則稱θ 爲第k 象限角。下表說明三角函數在各象限角之函數值的性質符號。

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
第一象限	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
第二象限	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
第三象限	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
第四象限	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$

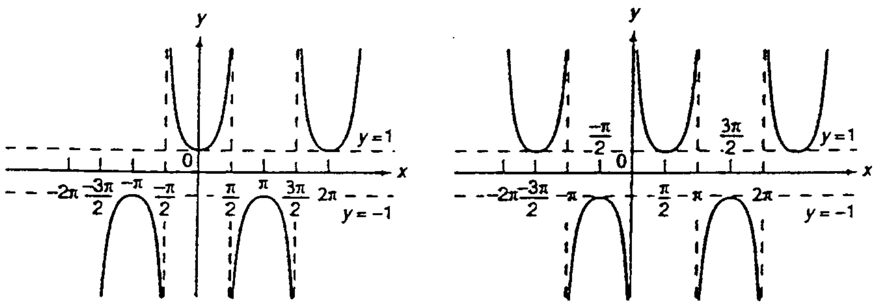
三角函數之圖形：







(a) $y = \tan x$　　(b) $y = \cot x$



(c) $y = \sec x$　　(d) $y = \csc x$

※練習題※

1. 將下列角度轉換成弧度角:

   (a) $\theta = 150^\circ$ (b) $\theta = -45^\circ$ (c) $\theta = 300^\circ$ (d) $\theta = 72^\circ$ (d) $\theta = 144^\circ$

   (f) $\theta = 1080^\circ$

2. 將下列弧度角轉換成角度:

   (a) $\frac{5\pi}{12}$ (b) $\frac{7\pi}{12}$ (c) $\frac{3\pi}{8}$ (d) 3π (e) $\frac{-\pi}{3}$ (f) $\frac{3\pi}{4}$

3. 假設一圓其半徑爲3, 其中有一弧其所對應的圓周角爲75°, 求其弧長。

4. 求下列三角函數的週期:

   (a) $\cos(3\theta + \frac{\pi}{4})$ (b) $\sin(\frac{\theta}{2} + \pi)$ (c) $\cos(\frac{\theta}{3})\sin(\frac{\theta}{2})$ (d) $\tan(2\theta + \pi)$

   (e) $\cot(-3\theta - \frac{\pi}{4})$ (f) $\tan\frac{\theta}{2}\cot\theta$ (g) $\sec(-3\theta)$ (h) $\csc(6\theta)$

   (i) $\sec 5\theta \csc 4\theta$

5. 求下列三角函數的值:

   (a) $\cos\frac{3}{4}\pi$ (b) $\sin\frac{5}{4}\pi$ (c) $\tan\frac{3}{2}\pi$ (d) $\cot\frac{5}{6}\pi$ (e) $\sec\frac{11}{6}\pi$ (f) $\csc\frac{5}{3}\pi$

6. 求$\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ 和$\csc\theta$ 的值:

   (a) $\theta = 6\pi$ (b) $\theta = -30^\circ$ (c) $\theta = -150^\circ$ (d) $\theta = -240^\circ$ (e) $\theta = \frac{2}{3}\pi$ (f) $\theta = \frac{8}{3}\pi$

7. 判斷下列三角函數值的正負:

   (a) $\cos 1110^\circ$ (b) $\sin 1110^\circ$ (c) $\tan 1110^\circ$ (d) $\cot 1110^\circ$ (e) $\sec 1110^\circ$

   (f) $\csc 1110^\circ$

8. 畫下列三角函數的圖:

   (a) $y = 3\sin\frac{\theta}{3}$ (b) $y = 3\sin(\theta - 1)$ (c) $y = 2\sin(\frac{\theta}{2} + 1)$

9. 畫下列三角函數的圖:

   (a) $y = \tan 2\theta$ (b) $y = 3\sec\frac{\theta}{3}$ (c) $y = 2\csc 6\theta$

三、三角恆等式

這節是討論一些有關三角函數的恆等式，這些恆等式是處理三角函數的基本工具。

[定理3.1]（平方關係）

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \qquad \tan^2\theta+1=\sec^2\theta \qquad \cot^2\theta+1=\csc^2\theta$

[定理3.2]（複角公式）

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

證明： 可設$0\le\alpha-\beta<\pi$，其它的情形可利用定理2.2與此處之證明討論之。當$\alpha-\beta=0$時，顯然成立，因此設$\alpha-\beta>0$。考慮單位圓上四點$P_1(\cos\alpha,\sin\alpha), P_2(\cos\beta,\sin\beta)$, $P(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta))$ 與$A(1,0)$ 。因為$\overline{AP}=\overline{P_1P_2}$，所以

$$\begin{aligned}(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2 &= (1-\cos(\alpha-\beta))^2+\sin^2(\alpha-\beta)\\ 2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta) &= 2-2\cos(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

$$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

[定理3.3]（複角公式）

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

證明 ：

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)\\ &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha+\beta) &= \cos(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta))=\cos((\frac{\pi}{2}-\alpha)-\beta)\\ &= \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cos\beta+\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\sin\beta\\ &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)\\ &= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

[**例**]：求$\sin\frac{\pi}{12}$,　$\sin\frac{5\pi}{12}$。

解 ：

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{\pi}{12} &= \sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\
\sin\frac{5\pi}{12} &= \sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}
$$

[**定理3.4**]

(1) （倍角公式）
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$,　$\cos 2\theta = \cos^2\theta-\sin^2\theta = 2\cos^2\theta-1 = 1-2\sin^2\theta$

(2) （半角公式）
$\sin^2(\frac{\theta}{2}) = \frac{1-\cos\theta}{2}$,　　$\cos^2(\frac{\theta}{2}) = \frac{1+\cos\theta}{2}$

[**例**]：求$\sin\frac{\pi}{8}$ 與$\cos\frac{\pi}{8}$。

解 ：

$$
\begin{aligned}
&\sin^2(\frac{\pi}{8}) = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\
&\cos^2(\frac{\pi}{8}) = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \\
&\because \sin\frac{\pi}{8} > 0 \quad \text{且} \quad \cos\frac{\pi}{8} > 0 \\
&\therefore \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \text{且} \quad \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}
\end{aligned}
$$

[**例**]：設a, b 是實數，則$a\cos\theta+b\sin\theta$ 之最大值爲$\sqrt{a^2+b^2}$，而最小值爲$-\sqrt{a^2+b^2}$。

解： 若$a=b=0$，則$a\cos\theta+b\sin\theta$ 之最大最小值均爲0。若$a^2+b^2>0$，則$(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$ 爲單位圓上一個點，因此是某個有向角α 之終邊與單位圓的交點，即

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{且} \quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$a\cos\theta+b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)$
$\because -1 \le \cos(\theta-\alpha) \le 1$　　$\therefore -\sqrt{a^2+b^2} \le a\cos\theta+b\sin\theta \le \sqrt{a^2+b^2}$
當$\theta = \alpha$ 時，$a\cos\theta+b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}$，而當$\theta = \alpha+\pi$ 時，$a\cos\theta+b\sin\theta = -\sqrt{a^2+b^2}$。所以$a\cos\theta+b\sin\theta$ 之最大值爲$\sqrt{a^2+b^2}$，最小值爲$-\sqrt{a^2+b^2}$。

[**定理3.5**]（積化和差）

$$\begin{aligned}\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\}\\ \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\}\\ \sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}\end{aligned}$$

[**定理3.6**]（和差化積）

$$\begin{aligned}\sin\alpha+\sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\ \sin\alpha-\sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\\ \cos\alpha+\cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\ \cos\alpha-\cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\end{aligned}$$

證明： 令$\theta=\frac{\alpha+\beta}{2},\varphi=\frac{\alpha-\beta}{2}$，則$\theta+\varphi=\alpha$ 且$\theta-\varphi=\beta$，利用複角公式可證得上列和差化積公式。

※練習題※

1. 求下列各值：
   (a) $-\cos 100^\circ \cos 35^\circ + \sin 100^\circ \sin 35^\circ$
   (b) $\sin 77^\circ \cos 43^\circ + \sin 43^\circ \cos 77^\circ$
   (c) $\dfrac{\tan 177^\circ - \tan 42^\circ}{1 + \tan 177^\circ \tan 42^\circ}$

2. 設$\triangle ABC$ 中，$\angle A = 36^\circ, \angle B = \angle C$，且$\overline{BC} = 1$。利用此三角形求$\sin 18^\circ$ 與$\cos 36^\circ$

3. 試證
   (a) $\sin(\theta - 60^\circ) + \cos(\theta - 30^\circ) = \sin\theta$
   (b) $\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \sin 2\theta$
   (c) $\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cos 2\theta$
   (d) $\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \tan^2\theta$
   (e) $\tan\theta + \cot\theta = 2\csc 2\theta$
   (f) $\cos\theta \csc\theta = \cot\theta$
   (g) $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$
   (h) $\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$
   (i) $\cos^4\theta - \sin^4\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
   (j) $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = 2\csc\theta$
   (k) $2(\sin^6\theta + \cos^6\theta) - 3(\sin^4\theta + \cos^4\theta) = -1$
   (l) $\cos 20^0 \cos 40^0 \cos 80^0 = \frac{1}{8}$

4. 試將$\cos 4\theta, \cos 5\theta, \cos 6\theta$表成$\cos\theta$ 的多項式。

5. 設$f(x) = 2\cos x - 3\sin x$。證明f 是一個週期函數，並求其主週期。

6. 求$4\cos^2\theta + 6\cos\theta\sin\theta + 12\sin^2\theta$ 的最大值與最小值。

7. 試證
$$\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2^n}} = 2^n \Pi_{k=1}^n \cos\frac{\theta}{2^k}$$

8. 證明：$\cos(n+2)\theta = 2\cos\theta\cos(n+1)\theta - \cos n\theta$，其中$n$ 是任一實數。

9. 試解下列方程式
   (a) $\sin 4x + \sin 2x = 0$
   (b) $2\sin^2 x + \sin x = 0$
   (c) $\sec x + 1 = 0$
   (d) $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$
   (e) $\sin^2 x - \cos x + 4 = 0$

10. 證明：$|\sin\theta| \le |\theta|$。

四、三角形與三角函數

由國中所學得的幾何不難得知，下列任一條件均唯一決定一個三角形：

(a) 已知三邊長(SSS)

(b) 已知兩邊長及此兩邊的夾角(SAS)

(c) 已知兩內角及此兩內角的夾邊長(ASA)

(d) 已知兩內角及此兩內角中任一角的對邊長(AAS)

在這節將討論如何利用三角函數求得上列四條件所決定的三角形。處理此問題，我將需要兩個主要定理，即餘弦定理與正弦定理。

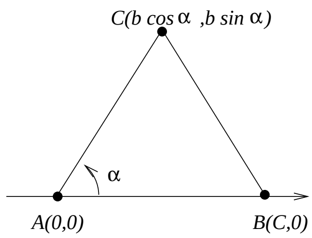
[**定理4.1**]（餘弦定理）

設$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=c,\quad \overline{BC}=a,\quad \overline{CA}=b,\quad \angle A=\alpha,\quad \angle B=\beta,\quad \angle C=\gamma$，則

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos\alpha\\ b^2 &= a^2+c^2-2ac\cos\beta\\ c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos\gamma\end{aligned}$$

證明： 此處將證明$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$，其它兩等式之同理可證得。將$\triangle ABC$ 置於直角座標平面上，使頂點A 爲原點，$\overline{AB}$ 在x 軸正向上，且$\overline{AC}$ 在x 軸上方，如右圖，則B之座標爲$(c,0)$，C 之座標爲$(b\cos\alpha,b\sin\alpha)$，且

$$\begin{aligned}a^2=\overline{BC}^2 &= (c-b\cos\alpha)^2+b^2\sin^2\alpha\\ &= c^2-2bc\cos\alpha+b^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\\ &= b^2+c^2-2bc\cos\alpha\end{aligned}$$

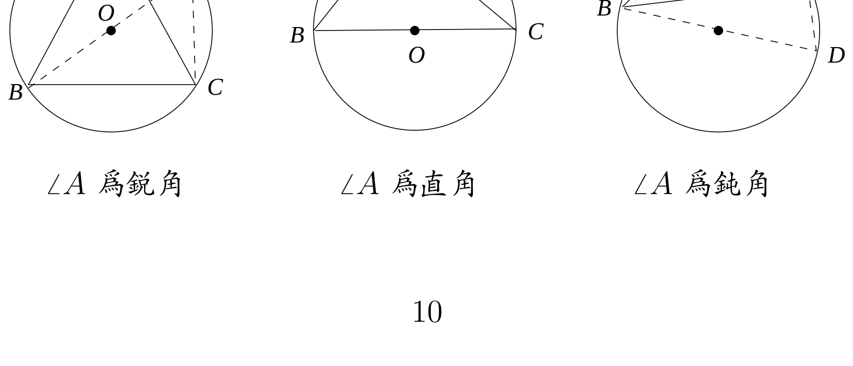


[**定理4.2**]（正弦定理）

設$\triangle ABC$ 之三邊長與三內角如定理4.1所述，則

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}=\frac{1}{2R}$$

其中R 是$\triangle ABC$ 外接圓的半徑。



$\angle A$ 爲銳角　　$\angle A$ 爲直角　　$\angle A$ 爲鈍角

證明： 令O 爲$\triangle ABC$ 之外心。若$\angle A$ 爲直角，則$a=2R$ 且$\sin\alpha=1=\frac{a}{2R}$，若$\angle A$ 不是直角，取$\triangle ABC$ 之外接圓上過B 之直徑的另一端點D ，則$\angle BCD$ 是直角。當$\angle A$ 爲銳角時，$\angle BDC=\alpha$ 且$\sin\alpha=\frac{a}{2R}$。當$\angle A$ 爲鈍角時，$\angle BDC=\pi-\alpha$ 且

$$\frac{a}{2R}=\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$

同理可證$\frac{1}{2R}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$。

例： 設$\triangle ABC$ 中，$\angle A=\frac{5\pi}{12},\quad \overline{AC}=2\sqrt{2},\quad \overline{AB}=2\sqrt{3}$，求$\overline{BC},\angle B,\angle C$。

解：

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= (2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{3})^2-2\times 2\sqrt{2}\times 2\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{12}\\ &= 8+12-(12-4\sqrt{3})=8+4\sqrt{3}=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2\\ \overline{BC} &= \sqrt{6}+\sqrt{2}\end{aligned}$$

令$\angle B=\beta$，則

$$\cos\beta=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2+(2\sqrt{3})^2-(2\sqrt{2})^2}{2(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times 2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \angle B=\frac{\pi}{4},\quad \text{且}\quad \angle C=\frac{\pi}{3}$$

例： 設$\triangle ABC$ 中，$\angle A=\frac{\pi}{6},\quad \angle B=\frac{\pi}{4}$，且$\overline{AB}=12$，求$\overline{AC},\overline{BC}$。

解： $\angle C=\frac{7\pi}{12}$，且

$$\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\overline{BC}}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\overline{AC}}=\frac{\sin\frac{7\pi}{12}}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{48}$$

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= \frac{48}{2(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=6(\sqrt{6}-\sqrt{2})\\ \overline{AC} &= \frac{48}{\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=12(\sqrt{3}-1)\end{aligned}$$

※練習題※

在下列問題中，固定以α, β, γ 表示$\triangle ABC$ 之三內角，且以a, b, c 表示$\triangle ABC$ 之三邊長，如定理4.1所示。

1. 證明：$a = b\cos\gamma + c\cos\beta, \qquad b = a\cos\gamma + c\cos\alpha, \qquad c = a\cos\beta + b\cos\alpha$ （投影定理）。
2. 設$b = c$ 且$\alpha = \frac{\pi}{12}$ ，求$a : b : c$。
3. 設$b = 5, c = 8, \alpha = \frac{\pi}{6}$ ，求a 及$\triangle ABC$ 外接圓周長。
4. 設$a = 3, \beta = \gamma = \frac{\pi}{6}$ ，求b, c 與$\triangle ABC$ 外接圓半徑。
5. 證明$\triangle ABC$ 的面積爲$\frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ca\sin\beta = \frac{abc}{4R}$ ，其中R 是$\triangle ABC$ 的外接圓半徑。
6. 令$S = \frac{1}{2}(a+b+c)$，證明$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{S(S-a)}{bc}}, \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{bc}}$。
7. 證明$\triangle ABC$ 之面積爲$\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$，其中$S = \frac{1}{2}(a+b+c)$。
8. 設$a = 5, b = 6, c = 7$ ，求$\triangle ABC$ 之面積，並求$\triangle ABC$ 之內切圓半徑。
9. 設M 爲$\overline{BC}$ 中點，證明$4\overline{AM}^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha$。
10. 設$\angle A$ 之平分線與$\overline{BC}$ 相交於I ，證明：$\overline{AI} = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}$。
11. 你能否找到$\triangle ABC$ 使得$a = 4, b = \sqrt{15}$，且$\beta = \frac{5\pi}{12}$？請說明理由，並說明你能找到幾個這樣的$\triangle ABC$。

五、複數

解一元二次方程式時，可利用配方法將給定的方程式改寫為

$$(x-a)^2 = b \tag{1}$$

其中a, b 是實數。當$b \geq 0$ 時，(1) 式有實數解，而當$b < 0$ 時，(1) 式無實數解。

在這節中，將引進複數，使得當$b < 0$ 時(1)式仍有解，當然此時的解不是實數。事實上，解方程式(1)，只需考慮b 的平方根。當$b < 0$ 時，$-b > 0$ 且$b = (-b)(-1)$ 。我們定義i 為-1 的一個平方根，記為$i = \sqrt{-1}$，即$i^2 = -1$ 。因此，b 的平方根為$\sqrt{(-b)}i$ 與$-\sqrt{(-b)}i$ ，而方程式(1)的解為$a + \sqrt{-b}i$ 與$a - \sqrt{-b}i$。

凡是可以寫成$x + iy$ 的數即稱為複數，其中x, y 是實數，而x 稱為$x + iy$ 的實部，記為$x = \mathrm{Re}(x + iy)$，y 稱為$x + iy$ 的虛部，記為$y = \mathrm{Im}(x + iy)$ 。每一個實數均視為虛部為0 的複數。令$\mathbf{R}$ 表示所有實數所構成的集合，而$\mathbf{C}$ 表示所有複數所構成的集合，則$\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$，且任意實係數一元二次方程式在$\mathbf{C}$ 中均有解。

如同$\mathbf{R}$ 與實數線的對應關係，$\mathbf{C}$ 將與平面對應如下。設P 為平面上任一點，若P 在直角座標平面的座標為(x, y) ，則稱P 對應複數$x + iy$ ，且稱$x + iy$ 是P 的複數座標。當一平面上每一點均賦予複數座標時，此平面稱為複數平面或高斯平面。複數平面上座標為0 的點，仍稱為原點。$\mathbf{R}$ 在複數平面上所對應的點集合稱為複數平面的實軸，是原直角座標平面上的x 軸。而所有iy 在複數平面上所對應的點集合稱為虛軸，是原直角座標平面上的y 軸。

在實數線上，任一實數r 的絕對值表示r 到原點的距離。沿用此觀念，在複數平面上，任一複數z 的絕對值，記為$|z|$ ，仍表示z 到原點的距離。因此，若$z = x + iy, x, y \in \mathbf{R}$，則$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$。由絕對值之定義可得，若$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2, x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbf{R}$，則$z_1$ 與z_2 間的距離為

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

[**定理5.1**] 設z_1, z_2 為兩複數，則$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow \mathrm{Re}z_1 = \mathrm{Re}z_2$ 且$\mathrm{Im}z_1 = \mathrm{Im}z_2$。

證明： $z_1 = z_2 \Longleftrightarrow |z_1 - z_2| = 0$

例： 複數平面上，以$a \in \mathbf{C}$ 為圓心，$r > 0$ 為半徑的圓之方程式為$|z - a| = r$。

接著介紹複數的四則運算。令$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \quad x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}$ ，定義z_1, z_2 間的運算如下。

(1) 和 ：$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$，
由此定義得知0 爲加法單位元素，且$z + (-z) = 0$ ，其中$z \in \mathbf{C}$。

(2) 積 ：$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$，
由此定義得知1 爲乘法單位元素。若$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbf{R}$ ，則

$$|z|^2 = (x + iy)(x - iy)$$

我們稱$x - iy$ 爲$z = x + iy$ 的共軛複數，記爲$\overline{z} = x - iy$，則$|z|^2 = z\overline{z}$。從幾何的觀點來看，$z, \overline{z}$ 對稱於實軸。

(3) 商 ：設$z = x+iy, \quad x, y \in \mathbf{R}$ 且$x^2+y^2 > 0$ ，則$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}$，又若$z_2 \neq 0$，則$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$。

[**定理5.2**] 設$z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ ，且$r \in \mathbf{R}$，則
(1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \qquad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
(2) $z_1z_2 = z_2z_1, \qquad (z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$
(3) $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$
(4) $rz_1 = (r\mathrm{Re}z_1) + i(r\mathrm{Im}z_1)$

[**定理5.3**] 設$z \in \mathbf{C}$ ，則$\mathrm{Re}z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ 且$\mathrm{Im}z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = \frac{-i}{2}(z - \overline{z})$。因此，$z \in \mathbf{R}$的充要條件爲$z = \overline{z}$。

[**定理5.4**] 設$z_1, z_2 \in \mathbf{C}$，則
(1)$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad$ (2)$\overline{z_1z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad$ (3)$\overline{(\frac{z_1}{z_2})} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ 當$z_2 \neq 0$。

複數的表示法，除了利用實部與虛部表示外，尚有所謂的極式。設$z \neq 0$ 是一個複數，令θ爲以$\vec{oz}$ 爲終邊的一個有向角，則

$$z = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta} \tag{2}$$

其中

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

稱爲尤拉公式。由定義$|e^{i\theta}| = 1$。在(2) 式中，θ 稱爲z 的一個幅角(argument)，記爲$\theta = \arg z$。由幅角之定義得知，若θ 是z 的一個幅角，則$\theta + 2n\pi$ 亦爲z 的幅角，其中n 是整數，又$\arg\overline{z} = -\arg z$。

利用三角函數的複角公式可證，若$\theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R}$，則

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

因此，利用數學歸納法得下列棣美弗公式：

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

其中n 是任一整數。

[**定理5.5**] 設$z_1, z_2 \in \mathbf{C}$，則
$(1)|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2|,\qquad (2)|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\qquad$ 當$z_2 \neq 0$ 。

證明： 當$z_1 = 0$ 或$z_2 = 0$ 時，上列等式顯然成立。設$z_1z_2 \neq 0$ ，且令θ_1, θ_2 分別爲z_1, z_2 的一個幅角，則

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= |z_1|e^{i\theta_1}|z_2|e^{i\theta_2} = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|e^{i\theta_1}}{|z_2|e^{i\theta_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \end{aligned}$$

例： 求$16 - 16\sqrt{3}i$ 的5次方根

解： $16 - 16\sqrt{3}i = 32(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 32e^{i\frac{5\pi}{3}}$
設$z^5 = 16 - 16\sqrt{3}i$，且設$z = re^{i\theta}$，其中$r = |z|$，且$\theta \in \mathbf{R}$ 。

$$\begin{aligned} r^5 = 32 &\implies r = 2 \\ e^{i5\theta} = e^{i\frac{5\pi}{3}} &\implies 5\theta = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi \implies \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2n\pi}{5}, \quad (\ n \text{ 是整數})\end{aligned}$$

令$\alpha = \frac{2\pi}{5}$，則$16 - 16\sqrt{3}i$ 的5次方根爲

$$2e^{i\frac{\pi}{3}},\quad 2e^{i(\frac{\pi}{3}+\alpha)},\quad 2e^{i(\frac{\pi}{3}+2\alpha)},\quad 2e^{i(\frac{\pi}{3}+3\alpha)},\quad 2e^{i(\frac{\pi}{3}+4\alpha)}$$

※練習題※

1. 計算 (a) $(2-3i)+(7-4i)$ (b) $3(4+i)-5(-3+6i)$ (c) $(1+i)(1-i)$ (d) $(2-3i)(7+4i)$

2. 將下列複數轉換成極座標表示式：
(a) $5i$ (b) $5+5i$ (c) $-2-3i$ (d) $3-3i$ (e) $2+2\sqrt{3}i$ (f) $3\sqrt{3}+3i$ (g) $1-\sqrt{3}i$ (h) $4\sqrt{3}-4i$

3. 將下列極座標表示式轉寫成直角座標表示式：
(a) $e^{3\pi i}$ (b) $2e^{-7\pi i}$ (c) $\frac{1}{2}e^{\frac{3}{4}\pi i}$ (d) $\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi i}$ (e) $6e^{-\frac{1}{6}\pi i}$ (f) $4e^{\frac{5}{6}\pi i}$ (g) $4e^{-\frac{5}{2}\pi i}$ (h) e^{i}

4. 求下列複數之共軛複數與絕對值：
(a) $3-4i$ (b) $4+6i$ (c) $-3+8i$ (d) $2-3i$ (e) $6e^{\frac{1}{4}\pi i}$ (f) $2e^{-i}$ (g) $\sqrt{3}e^{\frac{1}{3}\pi i}$ (h) $10e^{-\frac{1}{2}\pi i}$

5. 在複數平面上畫出集合$S=\{z\in\mathbf{C}|\ |z-z_0|\le a\}$ 的圖形，其中$z_0\in\mathbf{C}$，且$a>0$ 。

6. 利用棣美佛公式並且直接展開$(\cos\theta+i\sin\theta)^4$, 求$\cos 4\theta$ 和$\sin 4\theta$ 的公式。

7. 利用歸納法證明棣美佛定理。

8. 解方程式$7z^2-14(1+i)z-3+10i=0$。

9. 設$P(x)$ 是一個實係數多項式，且其次數>0 ，證明：若α 是方程式$P(x)=0$ 的一根，則$\overline{\alpha}$ 亦爲$P(x)=0$ 的一根。

10. 設$n>1$ 是整數，且$\theta\in\mathbf{R}$
(a) 求$\cos\frac{\theta}{n}+\cos\frac{2\theta}{n}+\cdots+\cos\frac{(n-1)\theta}{n}$ 與 $sin\frac{\theta}{n}+\sin\frac{2\theta}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\theta}{n}$ 。
(b) 證明：$\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{(2n-2)\pi}{n}=-1,\quad \sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(2n-2)\pi}{n}=0$

11. 證明：若$z,w\in\mathbf{C}$ ，則$|z+w|\le|z|+|w|$。並問何時等號成立，請說明理由。

12. 設$z_1,\cdots,z_n\in\mathbf{C}$，滿足$|z_k|<1,\quad k=1,\cdots,n$，且設非負實數$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 滿足$\sum_{k=1}^n\lambda_k=1$。證明：$|\sum_{k=1}^n\lambda_k z_k|<1$。並請利用幾何的方法說明之。

六、複數與幾何

這節的目的，在說明如何利用複數座標處理平面幾何問題。首先，討論有關直線的問題。設$a, b, c \in \mathbf{R}$ 且$a^2 + b^2 > 0$ ，則方程式$ax + by + c = 0$ 表示直角座標平面上的一直線L 。令$z = x + iy$，則

$$ax + by + c = \frac{a}{2}(z + \overline{z}) + \frac{b}{2i}(z - \overline{z}) + c = \overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + \beta$$

其中$\alpha = \frac{a+bi}{2}$ ，且$\beta = c$ 。因此，L 的複數座標方程式爲$\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + \beta = 0$ 。

設z_1, z_2 爲L 上相異兩點，則

$$\overline{\alpha}z_1 + \alpha\overline{z_1} + \beta = 0 = \overline{\alpha}z_2 + \alpha\overline{z_2} + \beta \Longrightarrow \overline{\alpha}(z_2 - z_1) + \alpha(\overline{z_2} - \overline{z_1}) = 0$$

若複數平面上一點z 在L 上，則$\overline{\alpha}(z - z_1) + \alpha(\overline{z} - \overline{z_1}) = 0$ 且

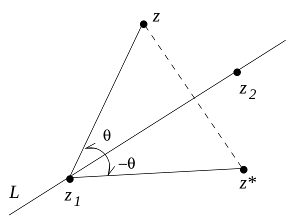
$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\overline{\alpha}(z - z_1)}{\overline{\alpha}(z_2 - z_1)} = \frac{-\alpha(\overline{z} - \overline{z_1})}{-\alpha(\overline{z_2} - \overline{z_1})} = \overline{(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1})}$$

即$\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ 是實數。反之，若$\frac{z-z_1}{z_2-z_1} = r \in \mathbf{R}$ ，則$z = z_1 + r(z_2 - z_1)$ ，且

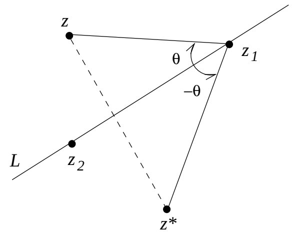
$$\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + \beta = (\overline{\alpha}z_1 + \alpha\overline{z_1} + \beta) + r\{\overline{\alpha}(z_2 - z_1) + \alpha(\overline{z_2} - \overline{z_1})\} = 0$$

因此，z 在L 上。

[**定理6.1**] 設z_1, z_2, z_3 爲複數平面上相異三點，則z_1, z_2, z_3 共線$\Longleftrightarrow$ $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ 是實數。



or



沿用上列符號，並設z 不在L 上。由定理6.1得知$\mathrm{Im}\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \neq 0$。令$\theta$ 爲$\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ 的一個幅角滿足$0 < |\theta| < \pi$，（見右圖）。令z^* 爲z 對於L 的對稱點，則$-\theta$ 爲$\frac{z^*-z_1}{z_2-z_1}$ 的一個幅角。因爲

$$|\frac{z^* - z_1}{z_2 - z_1}| = \frac{|z^* - z_1|}{|z_2 - z_1|} = \frac{|z - z_1|}{|z_2 - z_1|} = |\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}|$$

所以

$$\frac{z^* - z_1}{z_2 - z_1} = |\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}|e^{-i\theta} = \overline{(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1})}$$

若令d 爲z 到L 的距離，則

$$d = |z - z_1|\,|\sin\theta| = |z - z_1| \cdot \frac{|\mathrm{Im}(\frac{z-z_1}{z_2-z_1})|}{|\frac{z-z_1}{z_2-z_1}|} = |z_2 - z_1|\,|\mathrm{Im}(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1})|$$

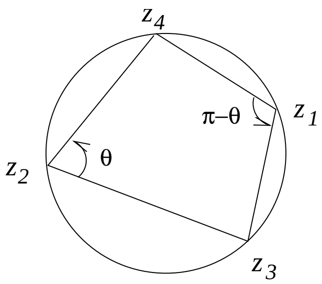
[**定理6.2**] 設z_1, z_2 爲複數平面上相異兩點，且L 爲通過z_1 與z_2 的直線。

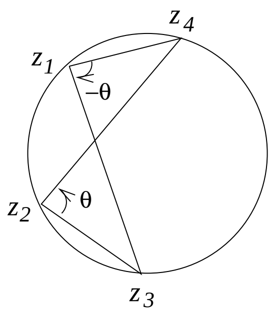
(1) 複數平面上兩點z, w 對稱於L 的充要條件爲$\frac{w-z_1}{z_2-z_1} = \overline{(\frac{z-z_1}{z_2-z_1})}$。

(2) 設複數平面上一點z 不在L 上，則z 到L 的距離爲$|z_2 - z_1|\,|\mathrm{Im}(\frac{z-z_1}{z_2-z_1})|$。

(3) 設L 的方向是由向量$z_2 - z_1$ 所定義，且z 不在L 上，則
z 位於L 的左邊$\iff \mathrm{Im}(\frac{z-z_1}{z_2-z_1}) > 0$, 而
z 位於L 的右邊$\iff \mathrm{Im}(\frac{z-z_1}{z_2-z_1}) < 0$

接著，談一談關於圓的問題。類似於三點是否共線之問題的討論，我們想了解何時複數平面上相異四點共圓。設z_1, z_2, z_3, z_4 爲複數平面上相異四點，且設這四點中，任意三點不共線。令C 表示通過z_2, z_3, z_4 的圓，且設在C 上，由z_2 經z_3 到達z_4 的方向爲逆時針方向。令θ 爲$\frac{z_2-z_4}{z_2-z_3}$ 的一個幅角滿足$0 < \theta < \pi$ ，則





$$\begin{aligned} z_1\text{在}C\text{上} \quad &\iff \quad -\theta\text{或}\pi-\theta\text{爲}\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\text{的幅角} \\ &\iff \quad \frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\cdot\frac{z_2-z_4}{z_2-z_3} \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

令

$$\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\cdot\frac{z_2-z_4}{z_2-z_3} = \frac{z_1-z_3}{z_1-z_4} : \frac{z_2-z_3}{z_2-z_4} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

稱爲z_1, z_2, z_3, z_4 的交比(Cross ratio)。

[**定理6.3**] 設z_1, z_2, z_3, z_4 爲複數平面上相異四點，則

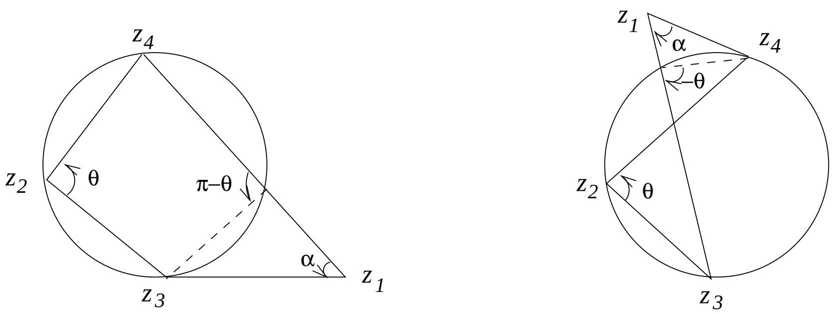
$$z_1, z_2, z_3, z_4\text{共圓} \iff (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbf{R}\text{。}$$

沿用上列符號，並設z_1 不在C 上。令α 爲$\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}$ 的一個幅角滿足$0 < |\alpha| < \pi$ ，則

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = |\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}| \cdot |\frac{z_2-z_4}{z_2-z_3}| e^{i(\theta+\alpha)}$$

若z_1 位於C 的內部，則$\pi-\theta<\alpha\leq\pi$ 或$-\pi\leq\alpha<-\theta$ 。因此$\pi<\alpha+\theta<2\pi$ 或$0>\alpha+\theta>\alpha\geq-\pi$，且$\mathrm{Im}(z_1,z_2,z_3,z_4)<0$。

若z_1 位於C 的外部，則$0\leq\alpha<\pi-\theta$ 或$-\theta<\alpha\leq 0$ ，因此$0<\alpha+\theta<\pi$ 且$\mathrm{Im}(z_1,z_2,z_3,z_4)>0$ 。



[**定理6.4**] 設z_1,z_2,z_3 爲不共線的三點，且C 爲此三點所決定的圓。並設在C 上，由z_1 經z_2 到達z_3 的方向是逆時針方向。複數平面上一點z 不在C 上。則

z 位於C 之內部$\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(z,z_1,z_2,z_3)<0$，

z 位於C 之外部$\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(z,z_1,z_2,z_3)>0$

※練習題※

1. 求下列方程式的軌跡
   (a) $|\frac{z-i}{z+i}| = 3$ (b) $\arg(\frac{z-i}{z+i}) = \frac{\pi}{2}$

2. 設α, β 是兩相異複數，且$r > 0,\quad \theta$ 是實數，求下列方程式的軌跡
   (a) $|z-\alpha| = r|z-\beta|$ (b) $\arg(\frac{z-\alpha}{z-\beta}) = \theta$

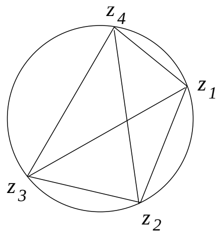
3. 証明$z_1 = i,\, z_2 = 1+3i,\, z_3 = 4+9i$ 三點共線。

4. 証明$z_1 = 3+i,\, z_2 = 2+2i,\, z_3 = 1+i,\, z_4 = 2$ 四點共圓, 並求其半徑r 與圓心。

5. 求圓方程滿足圓心在$3-i$, 半徑爲4。

6. 設Γ 表示複數平面上的一個圓，則Γ 的方程式可寫爲$z\overline{z} + \overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + \beta = 0$，其中$\alpha$ 是複數，且β 是實數。請問α, β 必須滿足什麼條件？說明之。

7. 假設$z_1,\, z_2,\, z_3,\, z_4$ 爲共圓四點,其圖形如下



   求証$|z_1z_3|\,|z_2z_4| = |z_1z_2|\,|z_3z_4| + |z_1z_4|\,|z_2z_3|$。

8. 設Γ 表示複數平面上的一個圓，且設z_1, z_2, z_3 是Γ 上相異三點。我們稱複數平面上兩點z, w 對稱於Γ ，若$(w, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}$。

   (a) 設Γ 的圓心爲$a \in \mathbf{C}$ ，且半徑爲$r > 0$ 。證明：複數平面上點z 對於Γ 之對稱點爲$\frac{r^2}{\overline{z}-\overline{a}} + a$。

   (b) 設L 爲一直線正交於Γ ，即若z_0 是L 與Γ 之一交點，則在z_0 與Γ 相切之直線垂直於L 。證明：若z 是L 上一點，則z 對於Γ 之對稱點也在L 上。

   (c) 設C 爲一圓正交於Γ ，即若z_0 是C 與Γ 之一交點，則在z_0 與C, Γ 相切之兩直線互相垂直。證明：$r^2 + t^2 = |a-b|^2$ 。並證明：若z 是C 上一點，則z 對於Γ 之對稱點也在C 上。