矩陣(一)　矩陣之基本運算及應用

同學們可能在不同的場合見到過矩陣，所謂矩陣就是一種長方形的數列，例如

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & \sqrt{2} \\ e & 0 & 1 \\ -1 & \pi & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, (0,1,2)$$

都是矩陣。一般的矩陣型如

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

有m (橫)列n (直)行，其第i 列第j 行的分量爲a_{ij}。我們有時將一個矩陣A 簡寫成

$$(a_{ij})_{m\times n}$$

例1 ，將$(\frac{1}{i+j})_{3\times 3}$ 矩陣寫出來。

若行數與列數相同之矩陣，就稱爲方陣。方陣中有二類最簡單、特殊，但也是最重要的。一類是對角線矩陣，也就是主對角線外分量均爲0 之方陣，如$\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$;

一類是對稱矩陣，即主對角線兩邊對稱之分量相等的方陣，如$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$。

我們將在第四節討論這二類方陣之特性與其應用。

在實際應用上，一個矩陣代表了某種特殊意義。例如下表是某校福利社的銷售狀況：

表1.　上半年銷售記錄(件)

型號	大號	中號	小號
背心	50	35	25
短褲	40	25	50

下半年銷售記錄(件)

型號	大號	中號	小號
背心	30	20	25
短褲	35	10	25

以矩陣來表示，其對應之銷售矩陣分別爲

$$A = \begin{pmatrix} 50 & 35 & 25 \\ 40 & 25 & 50 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 25 \\ 35 & 10 & 25 \end{pmatrix}。$$

合計一整年的銷售記錄可由表1 相同位置之數字相加而得：

表2.　全年銷售記錄(件)

型號	大號	中號	小號
背心	80	55	50
短褲	75	35	75

其對應之累積銷售矩陣爲

$$C = \begin{pmatrix} 80 & 55 & 50 \\ 75 & 35 & 75 \end{pmatrix}。$$

我們很自然地定義矩陣C 爲矩陣A 與矩陣B 之和, 記爲$C = A + B$, 即將A 與B 中對應之分量相加而得。

一般的情形，兩矩陣要有相同的行數以及相同的列數才能相加(減)，其和(差)矩陣即爲對應之分量相加(減)。

我們也可定義任一實數與矩陣之乘積，此種運算就叫係數積。一般說來一個矩陣的係數積即將此係數與矩陣的每一分量相乘而得。

這種係數積也有實際的意義。假設5 件背心(或短褲)爲一包，若把全年銷售記錄改以〝包〞表示，即將表2 中各分量乘以$\frac{1}{5}$:

表3.　全年銷售記錄(包)

型號	大號	中號	小號
背心	16	11	10
短褲	15	7	15

其對應之銷售矩陣(以包爲單位)成爲

$$D = \begin{pmatrix} 16 & 11 & 10 \\ 15 & 7 & 15 \end{pmatrix}。$$

因此矩陣D 即將C 中各分量都乘以$\frac{1}{5}$ 得出，也就是說$D = \frac{1}{5}C$。

假設同型號的背心與短褲其成本與售價如下表

表4.　　每包之成本與售價(百元)

型號	成本	售價
大號	8	10
中號	7	9
小號	6	8

其對應之價錢矩陣就爲$E = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 7 & 9 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$。

因此我們可計算出該福利社全年所賣出背心與短褲之總成本與總收入如下

表5.　　全年之總成本與總收入

種類	總成本	總收入
背心	$16 \times 8 + 11 \times 7 + 10 \times 6 = 265$	$16 \times 10 + 11 \times 9 + 10 \times 8 = 339$
短褲	$15 \times 8 + 7 \times 7 + 15 \times 6 = 259$	$15 \times 10 + 7 \times 9 + 15 \times 8 = 333$

其對應之矩陣爲$F = \begin{pmatrix} 265 & 339 \\ 259 & 333 \end{pmatrix}$。

我們定義矩陣F 是矩陣D 與矩陣E 之乘積，記爲$F = DE$。我們注意到F 的

第一列第一行分量265 即爲D 之第一列與E 之第一行內積，

第一列第二行分量339 即爲D 之第一列與E 之第二行內積，

第二列第一行分量259 即爲D 之第二列與E 之第一行內積，

第二列第一行分量333 即爲D 之第二列與E 之第二行內積。

一般情形下若兩矩陣U 與V 可相乘，因爲U 之某列要與V 之某行做內積，因此我們要求U 之行數等於V 之列數。其乘積矩陣之列數即爲U 之列數，行數即爲V 之行數。用數學來表示就是

$$U_{m\times n}V_{n\times r} = W_{m\times r}\text{。}$$

W 之第i 列第j 行分量即爲U 之第i 列與V 之第j 行內積而得 .

例2 ：$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$，求$UV$，$VU$；$UW$，$WU$。

例3：$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 求PQ 及QP。

注意到在方陣中有兩個很特殊的方陣，一個是零方陣，一個是單位方陣。

零方陣O 即分量全爲0 之方陣，它滿足了對所有的方陣A，$O + A = A = A + O$。

而單位矩陣$I = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ (即對角線全爲1，其它位置全爲0之方陣)，
它滿足了對所有的方陣A，$AI = A = IA$。
這個零方陣事實上〝相當於〞實數中的0，而單位方陣〝相當於〞實數中的1 。但矩陣的乘法與實數的乘法有很大的不同，如：
1. 無交換律：如例2、例3。

2. 注意到兩個非零的實數相乘必不爲零，兩個非零的矩陣相乘可能爲零，

$$如\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

3. 無消去律：

$$如\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$但\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}。$$

想一想，爲什麼實數的乘法卻有消去律呢？如$3x = -6 \Rightarrow x = -2$。

同學們可能不覺得實數這個性質的重要性，但這是我們用以解高次多項式根的依據，例如

例4：求解實數x 使得$x^2 = 1$。

但因爲矩陣沒有這樣的性質，所以我們無法像實數般地來解矩陣方程式，因此矩陣方程式就比我們想像的難解。

例5 ：試找出至少十個不同的3×3 矩陣，使得$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

矩陣雖然有些性質與實數不同，但大部份實數有的性質它仍保有。

如 $(A+B)+C = A+(B+C)$; $(AB)C = A(BC)$;
$A+B = B+A$;
$A(B+C) = AB+AC, \quad (B+C)A = BA+CA$。 ($why?$自己check 一下。)

利用矩陣，我們能對線性方程組有更深入的瞭解，如一個m 個方程式n 個變數的線性方程組

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

我們可將其寫成矩陣的簡潔型式$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}。$$

因此要解一個線性方程組就等於是在解矩陣方程式。 利用矩陣的性質，我們〝易〞得到下面關於線性聯立方程組之特性。

定理：每個線性方程組之解只可能有下列三種情形：

(1) 有唯一解 (2) 有無窮多組解 (3) 無解。

(為什麼？試證之)

那，如何判斷線性方程組是否有解及如何求解呢？先來看個例題：

例. 解聯立方程組

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

將之寫成矩陣形式：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

如何解呢？消變數！

如何消變數呢？Gauss 消去法。

觀察：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1| & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1| & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1| & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2| & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1| & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2| & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0| & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2| & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1| & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1| & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0| & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2| & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1| & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1| & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1| & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1| & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1| & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}| & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1| & 0 \end{pmatrix}$$

則

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} (\text{why？})$$

我們來觀察上面所用到的三種運算：

(1) 將A 的兩列交換。

(2) 將A 的某一列乘以非零的λ 倍。

(3) 將A 的某一列的λ 倍加到另一列。

把這三個〝列運算〞的動作以數學化的語言來講的話，事實上只是在A 的左側乘上了一些所謂的〝初等矩陣〞。

現在我們來看這三種基本列運算所各自對應的初等矩陣：

爲了簡明起見，我們考慮3×3 方陣。

(1) $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

由於

$$RA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

所以左乘A以R的作用就相當於將A的第一列及第二列對換。另一方面，若我們注意到

$$R = RI = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

則R本身也就是將單位矩陣I的第一列與第二列對換而來。

(2) $R = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 0$

由於

$$RA = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

所以，左乘A 以R 的作用相當於將A 的第一列的元素皆乘以λ 。這樣同樣地觀察

$$R = RI = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

則得R 的第一列就是I 的第一列的λ 倍。

(3) $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$

由於

$$RA=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\\lambda a_{21}+a_{31}&\lambda a_{22}+a_{32}&\lambda a_{23}+a_{33}\end{pmatrix},$$

所以，左乘A 以R 的作用就相當於將A 的第二列的λ 倍加於第三列。同樣地，由於

$$R=RI=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

R 本身也就是將單位矩陣的第二列的λ 倍加到第三列而得來的。
這些初等矩陣非常重要，我們在第二節求一個方陣之反方陣時尚會用到。

再來，我們來看看最常見的線性方程組，即當方程式數目與變數數目相等的情形($m=n$)。也就是給一個$n\times n$ 的方陣A 與$n\times 1$ 矩陣b ，要求解一個$n\times 1$ 之矩陣x ，使得$Ax=b$。先回憶一下一個一元一次線性方程式$ax=b$ 之解法，若$a=0$，可能無解也可能無限多解，若$a\neq 0$，則兩邊同除a，可得$x=\frac{b}{a}$ 了！那，何謂除呢？一個不等於零的方陣可不可除呢？若方陣A 〝可除〞的話，是不是$Ax=b$ 就可以輕易地求解了？我們將在下一節中討論此問題。

最後，我們舉一個例子來看看矩陣之〝實用〞性。
我們知道二次方程

$$x^2+1=0,$$

在實數域$\mathbf{R}$ 中無解。但是若我們引入記號

$$i=\sqrt{-1},$$

並且假裝$i^2=-1$ ，則以上二次方程有二根：

$$x=\pm i$$

因此，我們〝自然〞地定義複數域

$$\mathbf{C}=\{\mathbf{x}+\mathbf{iy}:\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{R}\}$$

我們稱一個複數（complex number）$x+iy$ 的x 爲其實部(real part），y 爲其虛部（imaginary part）。形如iy 的複數被稱爲純虛數（purely imaginary number）, 即〝純粹想像出來的

數〞。複數的加、減、乘、除定義如下：

$$\begin{aligned}(a+ib)\pm(x+iy) &= (a\pm x)+i(b\pm y),\\ (a+ib)(x+iy) &= (ax-by)+i(ay+bx),\\ \frac{a+ib}{x+iy} &= (a+ib)\left(\frac{1}{x+iy}\right),\\ \frac{1}{x+iy} &= \frac{x-iy}{x^2+y^2}\,。\end{aligned}$$

基本上，這些運算〝想像〞（imagine）的成分居多。不過，利用矩陣的理論，複數也會變得稍爲〝眞實〞一點。

我們考慮實數域上的2×2 矩陣

$$\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

注意：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}^2=-\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\pm\begin{pmatrix} x & y\\ -y & x\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a\pm x & b\pm y\\ -(b\pm y) & a\pm x\end{pmatrix}\\ &= (a\pm x)\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+(b\pm y)\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y\\ -y & x\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ax-by & ay+bx\\ -(ay+bx) & ax-by\end{pmatrix}\\ &= (ax-by)\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+(ay+bx)\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x & y\\ -y & x\end{pmatrix}^{-1}=\tfrac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x & -y\\ y & x\end{pmatrix}\text{(why？)}$$

通過觀察，得知所有這種矩陣所構成的集合

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\;:a,b\in\mathbf{R}\right\}$$

對加、減、乘、除封閉，而且考慮對應

$$a+ib \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

則以上〝眞實〞的2×2矩陣域與複數域同構。特別地，

$$i \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

重要的是，矩陣$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$是眞實的，遠比$i=\sqrt{-1}$這個〝想像〞的約定符號有意義。在下一節中，利用這種對應，我們對複數的極式表現會得到較好的理解。

Remark : 事實上不只線性方程組可寫成矩陣方程式，線性規劃問題也可改成矩陣的型式。例如我們希望在

$$\begin{aligned} x_1-2x_2 &\le 7,\\ 3x_1+4x_2 &\le 8,\\ 5x_1+6x_2 &\le 9,\\ x_1 &\ge 0,\\ x_2 &\ge 0, \end{aligned}$$

限制之下求函數$f(x_1,x_2)=2x_1+x_2$ 之極大值。設

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},\quad \mathbf{c}=[2 \quad 1],$$

則眾多的不等式條件可簡潔地以

$$A\mathbf{x}\le \mathbf{b},\quad \mathbf{x}\ge 0.$$

表示出，函數f 也可改寫成$f=\mathbf{c}\,\mathbf{x}$ 。因此矩陣不可避免地在線性規劃上扮演了一個重要的角色。

矩陣不只在數學上非常重要，還在機率、統計學、物理學、生態學、密碼學、電路、自動控制、電腦圖學、管理學上有很多的應用，甚至還和醫學上人體斷層掃描有關。矩陣理論(又稱線性代數)遂成爲各行業不可或缺之工具。

※練習題※

1. 試解聯立方程組$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

2. 令$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ 試求3×3矩陣B使得BA 爲一上三角矩陣 .

3. 當$(a, b, c) =$ (1) $(1, 0, 2)$, (2) $(2, -1, 0)$, (3) $(1, 1, 1)$, (4) $(1, 2, -1)$,
   解線性方程組$\begin{cases} x - y + z = a \\ 2x + 3y = b \\ 2y - z = c \end{cases}$

4. 解線性方程組$\begin{cases} w + 2x - 3y + 3z = -1 \\ 2w + 4x - 5y + 4z = 1 \end{cases}$

5. 求a, b, c, d 之條件，使得方程組$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ x + z = b \\ 2x + y + dz = c \end{cases}$
   (1)有唯一解 (2)有無窮多組解 (3)無解

矩陣(二)　方陣之逆的求法

上一節我們談到，要求解矩陣方程$Ax=b$，其中A 爲一個方陣，只要A〝可除〞即可，但什麼樣的A 可除？$\frac{1}{A}$ 又是什麼？由解一元一次方程式的靈感，我們有下面所謂反矩陣的定義。設A 爲一方陣，若存在矩陣B 使得$AB=BA=I$ (單位矩陣)，則稱A 可逆，且B 爲其反矩陣。我們馬上注意到並非所有的方陣均可逆，例如零矩陣O 就不可逆，原因是任何矩陣與它相乘都還是零矩陣，即

$$OB=BO=O。$$

事實上很多不是O 的矩陣也都不可逆，例如矩陣若有一列或一行全爲0，則它一定不可逆。

例：証明$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ 不可逆。

若一矩陣可逆，則其反矩陣一定是唯一的。其証明並不難，假設A 有兩個反矩陣B 及C，則

$$AB=BA=I \quad 且 \quad AC=CA=I。$$

因此

$$B=BI=B(AC)=(BA)C=IC=C。$$

此時我們可將A 之反矩陣記爲A^{-1}。

那如何求A^{-1} 呢？
還是要回到解聯立方程式的問題，記得給一個方陣A，我們可經過初等的列運算(i.e.Gauss消去法)，將它化簡成一個較簡單的形式。

那，如果我們經過這些初等的列運算後，可將A 化爲I 的話，那我們將這些列運算的過程記錄如下：

$$R_m...R_2R_1A=I,$$

則，A^{-1}的反矩陣存在，而且

$$A^{-1}=R_m...R_2R_1,$$

A^{-1}可經由列運算求出來了。

例. 求$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$之逆矩陣。

我們在A 的右側放一台〝錄影機〞I，它的作用是記錄一切對A 所作的運算。

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

對這個矩陣作初等列運算：

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

（將-3倍的第一列加之於第二列）

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

（將第二列加之於第一列）

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

（將第二列乘以$-\frac{1}{2}$）。

以上的運算相當於

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} A \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} A = I \end{aligned}$$

所以，

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

例.求$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 之逆A^{-1}。

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \longrightarrow &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \end{aligned}$$

所以，

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

反矩陣及矩陣的乘冪有下列性質，同學們可嘗試証明之。

定理：設方陣A 可逆，則

(1) A^{-1} 亦可逆，且$(A^{-1})^{-1} = A$。

(2) A^n 亦可逆，且$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n = A^{-n}$。

(3) $\forall r \neq 0, rA$ 亦可逆；且$(rA)^{-1} = \frac{1}{r}A^{-1}$。

(4) A^t 亦可逆，且$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$。

(5) $A^rA^s = A^{r+s}$ 且$(A^r)^s = A^{rs} \quad \forall r, s \in \mathbf{Z}$。

(6) 若B 可逆；則AB 與BA 皆可逆。

現在回到我們關心的線性方程組(即$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$) 上面。

定理：若係數矩陣A 可逆，則$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一解$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$。

証明：

$$\mathbf{x} = I\mathbf{x} = (A^{-1}A)\mathbf{x} = A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{b}。$$

定理：設A 爲一方陣，則下列條件等價：

(1) A 可逆，

(2) 齊次方程$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有零解$\mathbf{x} = \mathbf{0}$，

(3) 每個向量$\mathbf{b}, A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 都有解，

(4) A 的〝行列式〞不爲0。

(略證之)：利用Gauss消去法之過程可看出。

Remark：大家可能認爲方程式數目多於變數數目$(m > n)$ 的方程組沒什麼討論的價值，例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 8 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix},$$

因爲通常它都無解。然而實際上它卻是一類非常重要的問題。

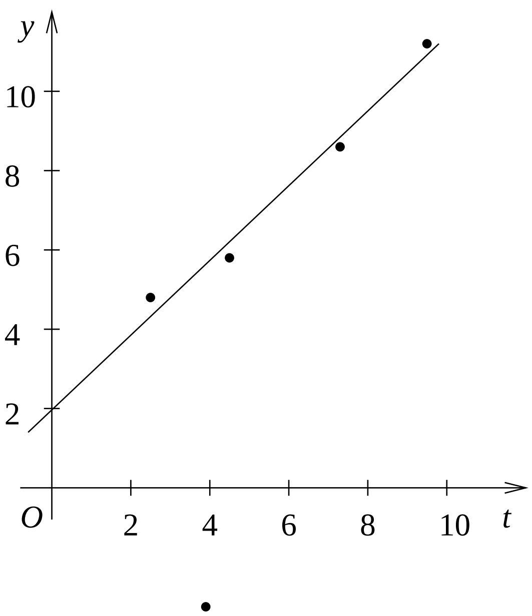
一輛等速運動的車子，其位置y 與時間t 有下列關係

$$y = a + bt。$$

想求a 與b 當然需要一些數據，假設我們測量到(t, y) 之資料如下

$$(0,2),\ (3,5),\ (5,6),\ (8,9),\ (10,11),$$

將之代入y 與t 的關係式，即得前段所述之無解方程組。因測量上或實驗上有誤差，我們當然不能期望剛好能找到一直線通過全部的點(如圖)，只要這直線與各數據之誤差總和最小就可。如何解這類最小平方多項式的問題當然和矩陣脫離不了關係。



※練習題※

1. 已知$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，求$A^{-1}$ 及$A^4-4A^3+6A^2-4A+I$ 。

2. 求$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

3. 證明$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 爲可逆，並求其反矩陣。

4. 試證明矩陣$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ 及$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ 都不可逆。

5. 設A 爲一方陣，證明A 可逆$\Leftrightarrow$ 對所有向量$\mathbf{b}$, $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 都有解。

矩陣(三)　線性映射與座標變換

我們現在回到福利社的銷售中來觀察一些現象。假設運動夾克、長褲、帽子的價錢如下表(單位拾元)

型號	大號	中號	小號
夾克	12	11	10
長褲	7	6	5
帽子	3	3	3

其對應之價錢矩陣就爲

$$\begin{pmatrix} 12 & 11 & 10 \\ 7 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}。$$

假設每個學生都購買全套的運動服裝, 若甲班有20 人要大號服裝, 30 人要中號, 10 人要小號, 則福利社向甲班收錢狀況如下:

$$\begin{pmatrix} \text{夾克收入} \\ \text{長褲收入} \\ \text{帽子收入} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12\times 20+11\times 30+10\times 10 \\ 7\times 20+6\times 30+5\times 10 \\ 3\times 20+3\times 30+3\times 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 10 \\ 7 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}。$$

若乙班有15, 25, 10 人分別要大號、中號、小號運動服, 則福利社

$$\begin{pmatrix} \text{夾克收入} \\ \text{長褲收入} \\ \text{帽子收入} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 10 \\ 7 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 25 \\ 10 \end{pmatrix}。$$

因此某班若有x, y, z 人分別要大、中、小號服裝, 福利社就可依下列公式算出其收入

$$\begin{pmatrix} \text{夾克收入} \\ \text{長褲收入} \\ \text{帽子收入} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 10 \\ 7 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

這是一個映射。全校需要大、中、小號的總人數知道後, 夾克、長褲、帽子的總收入也可依此映射求出。而且注意到,這個映射會滿足人數相加後的總收入 = 原先各別收入之和，人數放大n倍之總收入=原先收入之n倍。這就是所謂的線性映射。

那是不是所有的線性映射都可以寫成矩陣的樣子? 答案是肯定的, 底下我們只考慮$F: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ 之線性映射, 其他的情形讓同學自行練習。首先我們注意到, 只要知道平面上兩個特殊點的F 映像, 則F 在平面上任意點的值都隨著完全決定。我們知道$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ 是$\mathbf{R}^2$

的標準基底, 設其F 映相分別爲

$$F\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\ F\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix},$$

則利用F 的線性條件

$$\begin{aligned}F\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) &= F\left(x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=xF\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)+yF\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\\ &= x\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+cy\\bx+dy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}。\end{aligned}$$

因此F 可寫成矩陣型式, 其對應矩陣之第一行即爲$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 之F 映像, 第二行即爲$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 之映像。

例: 線性映射$F_1:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ 把$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 分別映到$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, 求$F_1$ 之矩陣表法。

例: 線性映射$F_2:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ 把$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 分別映到$\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$, 求$F_2$ 之矩陣表法。

例: 線性映射$F_3\circ F_2:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$, 求$F_3$之矩陣表法。

$$\text{輸入}\mathbf{x}\longrightarrow\boxed{\text{系統(黑箱)}}\longrightarrow\text{輸出}\mathbf{y}$$

在實際應用中, 一個物理系統(如電路系統)之作用情形我們可能不知道, 因此稱之爲黑箱, 但我們可做實驗給不同的輸入(如電壓), 分別測出其輸出(如電流), 依這些數據可以來決定此系統之作用。假設此黑箱是一線性系統, 且$\mathbf{x}\in\mathbf{R}^m$, $\mathbf{y}\in\mathbf{R}^n$, 則其關係必爲

$$\mathbf{y}=A\mathbf{x},$$

其中A 爲一個$n\times m$ 的矩陣。我們知道怎麼求矩陣A, 其第一行即爲輸入$(1,0,\cdots,0)^t$ 之輸出向量, 第二行即爲$(0,1,0,\cdots,0)^t$ 之對應輸出, $\cdots$, 因此做m 個實驗就可得到A, 也就瞭解了此系統的作用情形。知道A 之後, 我們可預測此系統在不同的輸入$\mathbf{x}$ 所產生的不同輸出$\mathbf{y}=A\mathbf{x}$。同理我們也可控制此系統, 要產生特定的輸出$\mathbf{y}$, 只要給特定的輸入$\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{y}$ (如果A 可逆)。

例: (1) 求$F_1\left(\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}\right)$; (2) 已知$F_1(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, 求$\mathbf{x}$。

上次提到每個線性方程組都可寫成矩陣方程式$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$。假如把$A\mathbf{x}$ 看成是線性映射, 解線性方程組即求此映射之逆映像, 換句話說, 給定向量$\mathbf{b}$, 要找$\mathbf{x}$ 使其映像$A\mathbf{x}$ 爲$\mathbf{b}$。

想一想：對怎樣的b, $Ax=b$會有解呢？

一個線性映射將點映到另一個點, 向量映到另一個向量, 因此是一個動態的線性幾何。底下我們針對平面上的線性映射$F:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, 探討其幾何上的性質。

例:設$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, 求下列之映像並畫圖:
(1) 直線$x-y=0$ (2) 正方形$(0,0),(0,1),(1,1),(1,0)$ 。

讓我們看看平面上線性映射的各種不同類型:

1. 旋轉: 設F 將平面上的向量對原點逆時鐘旋轉θ 角, 則

$$F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{且} \quad F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix},$$

因此$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$。

例如 旋轉45^o 的線性映射矩陣爲$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$;

旋轉90^o 的線性映射矩陣爲$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

旋轉180^o 的線性映射矩陣爲$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 此時$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 被送到$\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$, 即爲其對原點之對稱向量。

例: 証明兩旋轉之複合映射仍爲一個旋轉, 其轉角爲何?

2. 鏡射: 設F 爲一鏡射, 其鏡射軸過原點且與x 軸正向夾角$\frac{\theta}{2}$, 則

$$F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{且} \quad F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix},$$

因此$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$。

例如對x 軸鏡射的線性映射矩陣爲$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

對y 軸鏡射的線性映射矩陣爲$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

對$x = y$ 軸鏡射的線性映射矩陣爲$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

對$x + y = 0$ 軸鏡射的線性映射矩陣爲$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$。

例: 証明兩相異鏡射的複合映射爲一個旋轉, 其轉角爲何?

3. 伸縮: 設F 將x 軸方向的向量伸縮c 倍, 將y 軸方向上的向量伸縮d 倍, 則

$$F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \quad 且 \quad F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix},$$

故

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}。$$

注意到$0 < c, d < 1$ 時爲縮小, $c, d > 1$ 時爲擴張。

例如$F_4\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 將x 軸方向之長度縮短一半, 而y 軸方向之長度伸張成兩倍。

例: 求正方形$(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)$ 的F_4 映像, 其面積有無改變?

4. 切變: x 軸方向c 倍切變之線性映射爲

$$F_5\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + cy \\ y \end{pmatrix},$$

y 軸方向c 倍切變之線性映射爲

$$F_6\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ cx + y \end{pmatrix}。$$

例: 試畫出正方形$(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)$ 在F_5 及F_6 作用下之映像, 假設$c = 1$ 及-1。

下面九個圖形説明了各種線性映射產生之效果。

恆等映射$F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ 可以看成旋轉的一種, 其轉角爲0° ; 或想成伸縮, x 及y 軸都伸長1倍$(c = d = 1)$; 也可視爲x 軸方向0倍之切變或y 軸方向0倍之切變。事實上我們可以證明:所

有平面上的可逆線性映射都可由旋轉、鏡射、伸縮、切變這四種結合產生。

Remark 1:我們並非故意遺漏平移, 一個平移映射$F_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{b}$ 將所有點$\mathbf{x}$ 都移動了向量$\mathbf{b}$, 它並不是一個線性映射。(why?)

Remark 2:前面提到的一次函數$f(x) = ax+b$ 推廣到高維空間就成爲$F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}+\mathbf{b}$, 即線性映射後加上一個平移。當$A$ 是旋轉或鏡射矩陣時, 這種映射F 是一個剛性運動, 也就是說距離、角度、面積等經過F 的映射後仍保持不變。事實上平面上所的剛體運動F,$F : R^2 \to R^2$必形如$F(x) = Ax+b$,其中A是可逆, 也就是平面上的剛體運動皆是旋轉、鏡射,再加上所謂的平移.

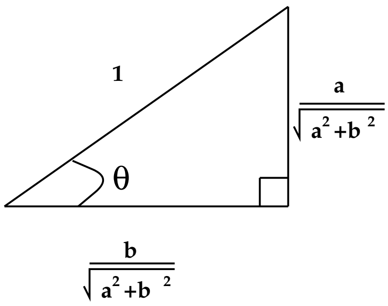
最後，我們回到將複數與矩陣的對應：

$$a + ib \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

觀察：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}.$$

由勾股定理,$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$及$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 爲某一斜邊長爲1的直角三角形的底和高：



令θ爲底角,則

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

應用前面所討論的理論，我們可以說：每一非零複數$a+ib$對應於將向量放大$\sqrt{a^2+b^2}$倍後，再旋轉θ角的線性變換。這與複數的極式表現（polar decomposition）是同義的：

$$\begin{aligned} a+ib &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ &= |a+ib|(\cos\theta + i\sin\theta). \end{aligned}$$

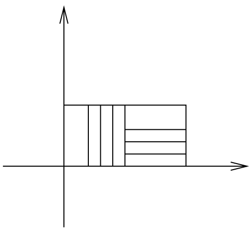
其中$|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$爲複數$a+ib$的模（modulus）,即其中複數平面上$a+ib$ 所表示之向量之長度。爲了方便，我們常記

$$z = |z|e^{i\theta},$$

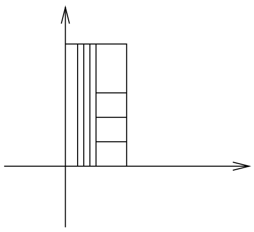
其中$e^{i\theta}$表示$\cos\theta + i\sin\theta$。應用三角函數的和角公式,我們有

$$z_1 z_2 = (|z_1|e^{i\theta_1})(|z_2|e^{i\theta_2}) = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

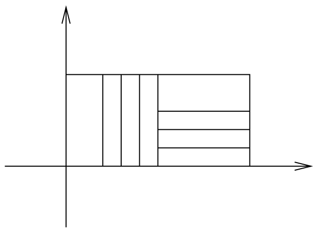
這個公式的意義是:將複數z_1乘予z_2的作用相當於將z_2的長度放大$|z_1|$倍,然後再將其旋轉θ_1角度。這正好是複數z_1所對應的線性變換的作用。用另一種觀點來看,三角函數的和角公式必須成立。這是因爲在眞實的世界中,放大及旋轉的線性變換滿足這些公式!



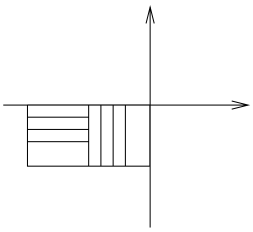
(a)恆等 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



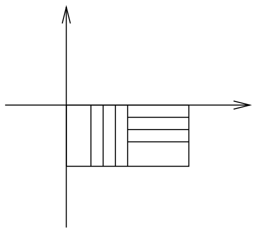
(b)伸縮 $\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$



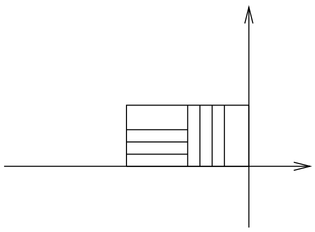
(c)擴張 $\begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}$



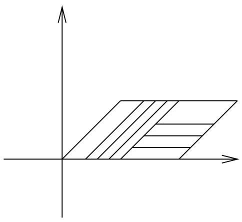
(d)旋轉180° $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$



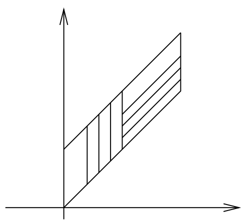
(e)對x 軸鏡射 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$



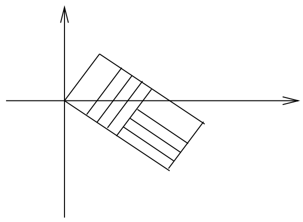
(f)對y 軸鏡射 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



(g)x 軸切變 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



(h)y 軸切變 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$



(i)順時鐘旋轉30° $\begin{bmatrix} 0.886 & 0.5 \\ -0.5 & 0.886 \end{bmatrix}$

※練習題※

1. 映射F 將平面上的向量對原點順時鐘轉$90°$, 然後在x 軸方向做2倍切變, 再對$x+y=0$ 直線做鏡射, 求此映射之數學表示。

2. 證明旋轉與鏡射的複合映射仍爲一個鏡射, 新的鏡射軸爲何?
(注意:先旋轉或先鏡射之結果不同)

3. 設$F:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ 爲對xy 平面之鏡射, 證明F 爲線性映射, 並求其矩陣表示。

4. 線性映射$F:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ 把$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 分別映到$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,
求F 及其逆映射之數學表示。

5. 設$F\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1&2\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, 求下列圖形$F$ 映像之方程式:
(1)直線$3x+2y=5$, (2)圓心在原點之單位圓,
(3)拋物線$y=x^2-1$, (4)雙曲線$xy=3$ 。
以上F 映像圖形名稱爲何?

6. 證明在平面上的剛性運動之下, 長度、角度都保持不變。

7. 證明在平面上的正交座標變換之下, 長度、角度都保持不變。

矩陣(四)　固有值理論

對角線矩陣是最簡單的矩陣, 因為它計算起來比其他矩陣要容易得多,見下例:

例: 設$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 且$d_1 d_2 \cdots d_n \neq 0$, 求$D^n, f(D), D^{-1}$ 及D^{-n}。

那對一般的矩陣B,如何把它弄得"像"對角矩陣一點? 我們先介紹一下所謂固有向量的概念。

先觀察一下，若A為對角矩陣，如A為對x 軸鏡射之線性映射, 其對應之矩陣為
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 發現

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

稱$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 均為$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 之固有向量, 但其對應之固有值(1 及-1) 不同。

假設我們能找到非零之向量$\mathbf{x}$ 使得其像$F(\mathbf{x})$ 也在落同一方向, 數學上就是

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x},$$

則$\mathbf{x}$ 稱為A 之固有向量, 其倍數λ (可正, 可負或零)稱為A 之固有值。
例: 從幾何上, 你能不能找出$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 之固有向量及固有值? 矩陣換成$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ 或$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 又如何?

有沒有系統的方法來求一個線性映射(或矩陣)之固有值及固有向量呢? 我們知道

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} = \lambda I \mathbf{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

因此固有向量$\mathbf{x}$ 即為矩陣$A-\lambda I$ 之一個非零解。回憶非零解存在之充要條件為行列式$|A-\lambda I| = 0$, 此行列式為一個λ 的多項式, 所以求固有值λ 即求此多項式之根。例如$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 則

$$|A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1),$$

此多項式有兩根1 及-1, 即爲A 之固有值。

例: 用行列式求下列矩陣之固有值: (1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

有了固有值λ 之後, 固有向量就是齊次方程組$(A-\lambda I)\mathbf{x} = 0$ 之非零解。回到$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 的例子, 它有兩固有值± 1:

當$\lambda = 1$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (A-\lambda I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow y = 0, x$ 可爲任意非零實數s,

故$\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$ 即爲對應之固有向量, 例如$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 就是其中之一。

當$\lambda = -1$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (A-\lambda I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x = 0, y$ 可爲任意非零實數t,

故$\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$ 即爲對應之固有向量, 例如$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 就是其一。

因此若$\mathbf{x}$ 爲A 的一個固有向量, 其對應之固有值與$\mathbf{x}$ 相同。通常在這些同方向的固有向量, 我們只找出一個來做代表, 例如以$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 代表所有同方向之固有向量$\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$。

例: 求前例中(1), (4) 之固有向量。

例: 求$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 及$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 之固有值及固有向量。

我們曾見過對稱矩陣, 其分量對主對角線對稱, 以數學表示就是$A^t = A$。本節中有那些矩陣是對稱矩陣呢? 你能否歸納出對稱矩陣固有值及固有向量之規律呢? 我們在底下列出其重要性質:

1. 其固有值均爲實數: 非對稱矩陣之固有值就不一定全爲實數, 例如旋轉矩陣$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$。

2. 對應不同固有值的固有向量彼此垂直: 像$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 不對稱, 其固有向量就不垂直。

3. 可找到一組固有向量形成正交基底: 例如$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 就只有一個固有向量, 無法形成基底。

由此可見非對稱矩陣的性質比對稱矩陣差很多。

例: 用下列矩陣之固有向量形成一組正交基底: (1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 。

那,對一般的B, 如要計算矩陣B 的k 次乘冪($k = 0, 1, 2, \cdots$), 我們當然希望可以找得到一個可逆方陣P,使得

$$P^{-1}BP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

則

$$B = PDP^{-1} \Rightarrow B^k = PD^kP^{-1},$$

但$P^{-1}BP = D$,即$BP = PD$,是什麼意思呢?

考慮$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ 之例, 將其二固有向量$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 及$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 組成一個矩陣

$$P = \begin{pmatrix} 2 & \vdots & 1 \\ -1 & \vdots & 2 \end{pmatrix},$$

則

$$BP = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \vdots & 1 \\ -1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \vdots & 7 \\ -2 & \vdots & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \vdots & 1 \\ -1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = PD,$$

其中D 爲對角線矩陣, 對角線分量就是對應之固有值2 及7。因此經過一串變換$P^{-1}BP = D$, 我們就將B 給對角化了。

例: 對角化下列矩陣: (1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, (3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 。

Remark 1:事實上對角化有其幾何意義。考慮固定原心的座標變換, 一個點的標準座標$\mathbf{x}$ 與其新座標$\mathbf{x}'$ 之關係可用矩陣P 轉換如下:

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}' \quad 或 \quad \mathbf{x}' = P^{-1}\mathbf{x}。$$

一個線性映射$F(\mathbf{x})$ 在標準座標下可寫成矩陣型式$F(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$, 但在新座標下其矩陣型式$C$ 又爲何呢? 下面圖解可幫助思考:

$$\begin{array}{cccc} & & \text{線性映射}F & \\ \text{標準座標} & \mathbf{x} & \xrightarrow{\qquad B \qquad} & B\mathbf{x} \\ & P\uparrow & & \downarrow P^{-1} \\ \text{新座標} & \mathbf{x}' & \xrightarrow{\qquad C \qquad} & C\mathbf{x}' \end{array}$$

線性映射F 將新座標上的點$\mathbf{x}'$ 映到$C\mathbf{x}'$, 而此像點之標準座標正是$B\mathbf{x}$, 因此

$$C\mathbf{x}' = P^{-1}(B\mathbf{x}) = P^{-1}BP\mathbf{x}' \quad \forall \mathbf{x}',$$

所以F 在新座標對應的矩陣$C = P^{-1}BP$ 。假若我們選取新座標的基底剛好就是B 的固有向量, 則F 在此座標下可化成最簡單的矩陣—對角線矩陣。

例: 找出新的座標軸, 使得下列矩陣在新座標下是對角線矩陣:

$$(1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad (3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}。$$

Remark 2: 回憶到, 若B 是對稱矩陣, 我們必可找到"互相垂直"之固有向量。若我們再將這些向量伸縮化成單位長度(即長度1), 則以他們組成各行之矩陣P, P 會滿足

$$P^tP = I \Rightarrow P^t = P^{-1}。$$

所以此時要求P^{-1} 不必硬算, 只要將P 轉置就可。此種特殊性質的矩陣P 前面提過, 叫做正交矩陣, 像旋轉、鏡射矩陣都是。

固有值理論與線性方程組求解, 以及最小平方多項式問題, 爲矩陣理論(線性代數)的三大課題。這套固有值的理論有非常廣泛的應用, 從力學, 量子物理, 化學反應, 電路系統, 幾何學到經濟學與遺傳學, 可謂無所不在。我們只敘述它在二次曲線標準化上的應用。

首先我們注意到二次式也可寫成矩陣的型式, 例如

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_2 + 6x_2^2 \\ &= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 6x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^tB\mathbf{x}。 \end{aligned}$$

這是二次式理論的一個關鍵, 如此Q 的討論可歸於線性映射(或矩陣)的討論。細心的同學馬上注意到這種表法不是唯一的, 例如矩陣B 可有下面不同的取法

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}, \cdots 。$$

我們選取對稱矩陣$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, 就是要利用它諸多良好的性質, 例如固有值都是實數, 固有向量可形成一組正交基底等。 例: 將下列二次式改成矩陣型式:

(1)$5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2$ (2)$x^2 + 2xy + y^2$ (3)$3s^2 + 8st + 3t^2$ (4)xy

前面提到的矩陣$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, 可找到正交矩陣$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ 來對角化它,

$$P^tBP = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}。$$

B 既然在新的正交座標系$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right\}$ 下有簡單的矩陣表法, 二次式Q 是否也有呢? 答案是肯定的, 因爲$\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^tB\mathbf{x} = (P\mathbf{x}')^tB(P\mathbf{x}') = (\mathbf{x}')^tP^tBP\mathbf{x}' \\ &= (\mathbf{x}')^tD\mathbf{x}' = (x_1', x_2') \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = 2(x_1')^2 + 7(x_2')^2。 \end{aligned}$$

因此在新座標系之下, 二次式$Q(\mathbf{x})$ 的x_1x_2 項就消失了, 也就是說我們將Q 給標準化了。
例: 將下列方程式化爲標準式, 並求新舊座標間關係:

(1)$5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$ (2)$xy = 1$

至於如何將一個一般的二元二次方程式標準化呢? 方法就是先將其二次式標準化, 再用配方法平移消去一次項。例如

$$3x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{18}{\sqrt{5}}x_2 + 2 = 0,$$

利用座標變換

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{x} = P\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x_1' + x_2'}{\sqrt{5}} \\ \frac{-x_1' + 2x_2'}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

代入方程式可得

$$\begin{aligned} &2(x_1')^2 + 7(x_2')^2 - 4x_1' + 7x_2' + 2 = 0, \\ &2(x_1' - 1)^2 + 7(x_2' + \frac{1}{2})^2 = \frac{7}{4}, \end{aligned}$$

因此再經過一個平移的座標變換

$$\begin{cases} x_1'' = x_1' - 1 \\ x_2'' = x_2' + \frac{1}{2} \end{cases}$$

可將其化成標準式

$$\frac{(x_1'')^2}{\frac{7}{8}}+\frac{(x_2'')^2}{\frac{1}{4}}=1。$$

因爲平移及正交座標變換都保長, 這個橢圓的長軸, 短軸, 中心, 頂點, 焦點, 離心率等就可輕易求出。

例: 將下列方程式標準化:
(1)$5x^2-4xy+8y^2+4\sqrt{5}x-16\sqrt{5}y+4=0$ (2)$xy-x-y-1=0$

二次曲線的分類用固有值來看是很清楚的, 例如一個一般的二元二次方程式

$$ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0,\quad (a,b,c\text{不全爲}0)$$

我們可先求出矩陣$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$的兩固有值$\lambda_1,\lambda_2$。若$\lambda_1\lambda_2\neq 0$, 其標準式型如

$$\lambda_1(x'')^2+\lambda_2(y'')^2=f'',$$

(1) 若λ_1 與λ_2 同號, 則此曲線爲橢圓或其退化情形(一點或ϕ);

(2) 若λ_1 與λ_2 異號, 則此曲線爲雙曲線或其退化情形(相交兩直線)。

(3) 若λ_1 與λ_2 有一爲0, 則其標準式型如

$$\lambda_1(x'')^2=e''y''\quad\text{或}\quad\lambda_2(y'')^2=d''x'',$$

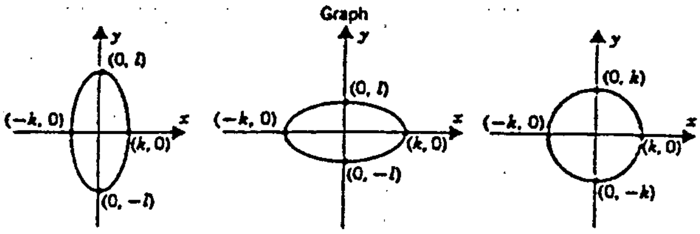
此曲線爲拋物線或其退化情形(平行兩直線, 重合兩直線或ϕ)。

例: 爲什麼不可能兩個固有值都是0 ?
例: 証明判別式$\delta=b^2-ac=-\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$等於$-\lambda_1\lambda_2$。(所以我們可用$\delta$ 判別二次曲線之類別)。

我們在圖1 列出了非退化的二次曲線圖形及其標準式。

圖 1

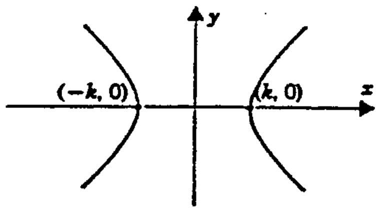
$$\frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{l^2}=1; k, l>0$$



$k<l$ $k>l$ $k=l$

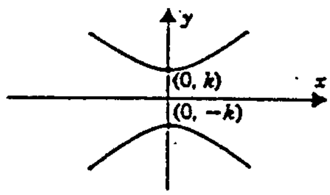
橢圓或圓

$$\frac{x^2}{k^2}-\frac{y^2}{l^2}=1; k, l>0$$



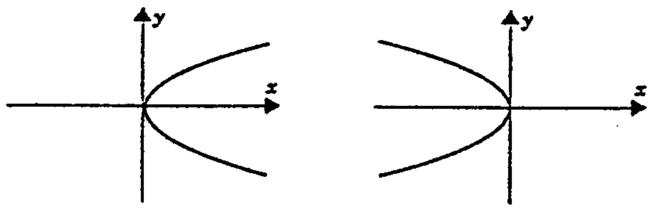
雙曲線

$$\frac{y^2}{k^2}-\frac{x^2}{l^2}=1; k, l>0$$



雙曲線

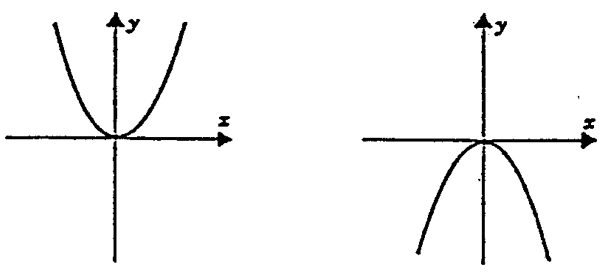
$$y^2=kx$$



$k>0$ $k<0$

拋物線

$$x^2=ky$$

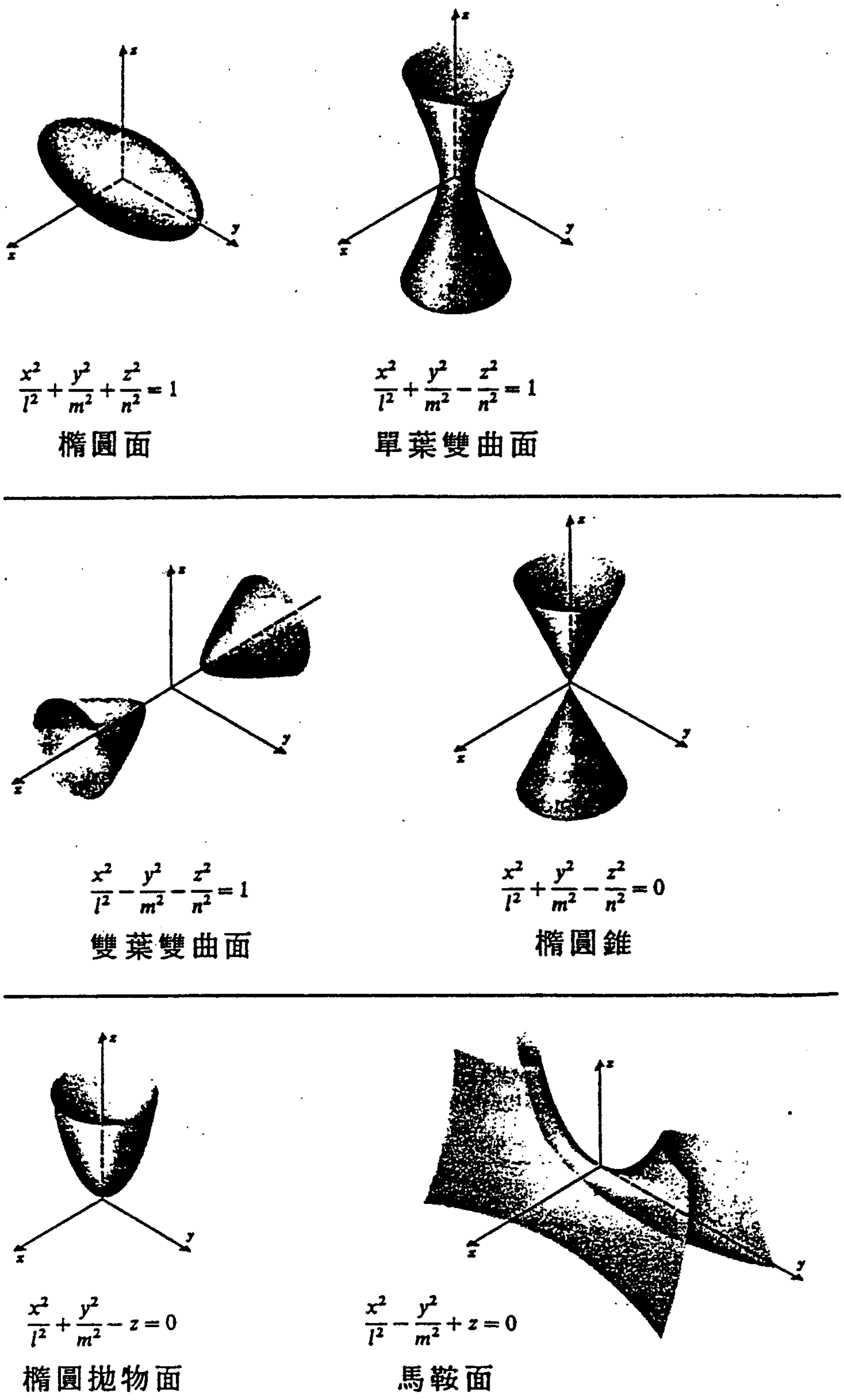


拋物線

$k>0$ $k<0$

這套理論不只可幫我們將平面上的二次曲線標準化, 還可推廣到高維空間來處理二次曲面, 由此可看出“系統化”處理問題的好處。接下來我們就看看三維空間上二次曲面標準化的問題, 圖2 列舉了這些曲面的圖形及其標準式。

圖 2



已知三元二次方程式

$$2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2yz+2xz-1=0,$$

將其寫成矩陣型式得

$$(x,y,z)\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1。$$

前面我們在例題中得知如何對角化此矩陣

$$P^{-1}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix},$$

因此換變數

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix},$$

原二次式可改寫成

$$(x')^2+(y')^2+4(z')^2=(x',y',z')\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=1$$

所以原方程式代表一個橢圓面, 三軸半長分別爲$1,1,\frac{1}{2}$。

例: 將二次式$2xy-6x+10y+z-31=0$ 標準化, 並判別其圖形之類型。

最後,我們給出一個應用的例子。

例:考慮序列

$$0,1,1,2,3,5,8,13,....$$

其中

$$a_0=0,a_1=1,a_2=1,$$
$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n,\quad n=1,2,3,...$$

我們現在來求a_n的一般式。令

$$x_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},x_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$
$$x_n=\begin{pmatrix}a_n\\a_{n-1}\end{pmatrix},\quad n=1,2,3,...$$

則有

$$x_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = Ax_n,$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，

$$x_{n+1} = Ax_n = A^2 x_{n-1} = ... = A^n x_1.$$

如果能求出A^n的公式,則有x_{n+1}的一般式。事實上，A可以對角化爲

$$A = P \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} P^{-1}$$

其中

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

及

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

因此,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{5}} P \begin{pmatrix} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n & 0 \\ 0 & (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} P \begin{pmatrix} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n & 0 \\ 0 & (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n \\ -(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} & -(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1} \\ (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n & -(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

所以,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n], \quad n = 0, 1, 2, ...。$$

※練習題※

1. 求下列矩陣之固有值及固有向量:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, (3) 鏡射$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, (4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$。

2. 找出正交矩陣P, 將上題的矩陣對角化。

3. 設$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$, 求$A^5 - 8A^3 - 3I$ 的固有值及固有向量。

4. 已知4×4 矩陣A 之固有值爲± 1 及$\pm i$, 求A^{1000} 。

5. 證明: A 可逆$\Leftrightarrow$ A 無固有值0。

6. 將下列方程式標準化, 求新舊座標間之關係, 並判斷其圖形之類別:

(1) $x^2 + 2xy + y^2 - 3\sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0$,
(2) $3x^2 + 8xy + 3y^2 + 10\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y = 0$,
(3) $2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z + 9 = 0$。

7. 令$a_0 = 1, a_1 = 3, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, n = 1, 2, ...$試求$a_{100}$之值