國立中山大學應用數學系
高雄區高中數學科資優生培育計畫
九十三學年度　高二班新生甄試

考試日期: 2004.10.02
考試時間: 09:30～11:30

共五題，每題佔20分，滿分100分。答題時，每題都必須寫下『題號』與『步驟』，並記得在答案卷上寫上自己的『姓名』及『報名編號』。

1. 設$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$。試求

   (a) S_n。

   (b) $\lim_{n\to\infty}S_n$。

   (a) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)=\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)=1-\frac{1}{(n+1)!}$

   (b) $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{(n+1)!}=1$

2. 設S為1到10000的整數全體所成的集合，S_n為S中n的倍數所成的子集合。試求下列集合的元素個數：

   (a) $S_6\cup S_{10}$

   (b) $S\cap(S_2\cup S_3\cup S_5)^c$

   (a) $\sharp(S_6\cup S_{10})=\sharp S_6+\sharp S_{10}-\sharp S_{30}=\lfloor 10000/6\rfloor+\lfloor 10000/10\rfloor-\lfloor 10000/30\rfloor=1666+1000-333=2333$

   (b) $\sharp(S\cap(S_2\cup S_3\cup S_5)^c)=\sharp S-\sharp(S_2\cup S_3\cup S_5)$
   $=10000-[\lfloor 10000/2\rfloor+\lfloor 10000/3\rfloor+\lfloor 10000/5\rfloor$
   $-(\lfloor 10000/6\rfloor+\lfloor 10000/10\rfloor+\lfloor 10000/15\rfloor)+\lfloor 10000/30\rfloor]=10000-$
   $[(5000+3333+2000)-(1666+1000+666)+333]=2666$

3. 設$z^4-2z^3\cos\theta+2z^2-2z\cos\theta+1=0$。試求以下各式的值。

   (a) $z+\frac{1}{z}$

   (b) $z^n+\frac{1}{z^n}$（其中n是整數）

   (a) 顯然，$z=0$不是給定方程式的根，從而方程兩邊同除以非0的z^2，整理得

   $$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2\left(z+\frac{1}{z}\right)\cos\theta=0$$

   所以$z+\frac{1}{z}=0,\ 2\cos\theta$

(b) 當$z+\frac{1}{z}=0$時，$z^2+1=0 \Rightarrow z=\pm i$，所以

$$z^n+\frac{1}{z^n}=(\pm i)^n+(\mp i)^n=\begin{cases}2 & n\text{為4的倍數時}\\ -2 & n\text{為偶數，但非4的倍數時}\\ 0 & n\text{為奇數時}\end{cases}$$

當$z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$時，

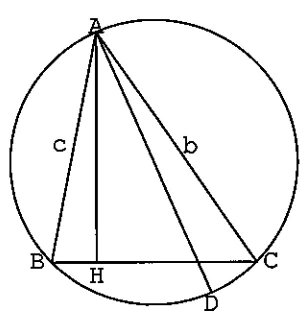
$$\begin{aligned} z^2-(2\cos\theta)z+1 &= 0\\ z &= \cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-1}\\ &= \cos\theta\pm i\sin\theta\\ &= e^{\pm i\theta}\end{aligned}$$

所以$z^n+\frac{1}{z^n}=e^{\pm in\theta}+e^{\mp in\theta}=2\cos n\theta$。

4. 在半徑為R的圓O中，做內接三角形ABC，如果$AB=c$，$AC=b$，求BC的長。

- 設直徑為AD，高為AH，$AB\cdot AC=AD\cdot AH$，所以$AH=\frac{bc}{2R}$。因此

$$\begin{aligned} BC &= BH\pm HC\\ &= \sqrt{AB^2-AH^2}\pm\sqrt{AC^2-AH^2}\\ &= \frac{1}{2R}(c\sqrt{4R^2-b^2}\pm b\sqrt{4R^2-c^2})\end{aligned}$$



5. 任給7個相異整數，求證其中必有2數，其和或差是10的倍數。

證明: 考慮$\{10k\},\{10k+1,10k-1\},\dots,\{10k+5,10k-5\}$,6個"巢"則至少有兩個數在同一巢內。

～全卷完～