承辦單位：國立中山大學應用數學系

答案：

1. 7425	2. 35	3. 40%	4. 4/9	5. C
6. 10 公分	7. $28-2\pi$	8. $38/5=7.6$	9. 30	10. 801
11. 40400	12. 18	13. $3+2\sqrt{3}$	14. $-1/9$	15. 253
16. 1/3	17. 9/32	18. 18	19. 8/9	20. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

注意事項：

1. 本試卷共 20 題計算題，每一題 5 分。
2. 考試時間：10：00~12：00。
3. 請將詳細步驟書寫於題目下方空白處，答案必須化簡並書寫於上方指定處。
4. 請將學校、姓名及報名編號寫在頁尾指定處。

---

1. 小茲有 24 個四位數，每一個四位數都是用 2，4，5，7 四個數各使用一次所作成。這些四位數中只有一個四位數是另一個四位數的倍數。試問此四位數是下面那一個？

解答: 我們從數值小的開始測試。因此我們先測試 $2457\times 2=4914$，因此 2457 較小。而 $2754\times 2=5508$，因為 5508 中含有兩個 5，因此不合。而我們測試 $2457\times 3=7371$，可知 7371 中含有兩個 7，因此不合。而我們再選擇 $2475\times 3=7425$。觀察到 7425 滿足需求。因此所求為 $\boxed{7425}$。 □

2. 設五個相異正整數的平均數是 15，中位數是 18，則此五個正整數中的最大者可能之最大值為？

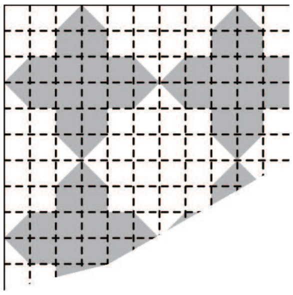
解答: 要求五個正整數中的最大者，並且數值中皆為正整數。且我們知道中位數為 18。因此我們須將較小的兩個數值選擇到最小。並且知道五個數值的總和為 $5(15)=75$。我們選擇較小的兩個數值分別為 1 和 2。因此也可決定另一個數值為 19。故所求之數值為 $75-1-2-18-19=\boxed{35}$。 □

3. 三木有一打大小相同的柳丁與一打大小相同的水梨，她要使用榨汁機來壓榨果汁，已知用 3 個水梨可榨出 8 盎司的水梨汁，用 2 顆柳丁可榨出 8 盎司的柳丁汁，現在她拿相同數量的水梨與柳丁來榨成水梨柳丁綜合果汁，則水梨汁所占的百分比為下列何者？

解答: 一個水梨可以榨出 $\frac{8}{3}$ 盎司的水梨汁。且一個柳丁可以榨出 4 盎司的柳丁汁。則水梨汁所占的百分比為：

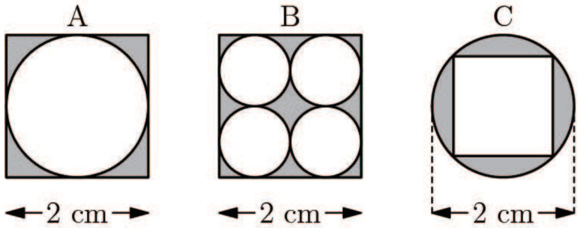
$$\frac{8/3}{8/3+4}\times 100=\frac{8}{8+12}\times 100=\boxed{40}$$ □

4. 已知一面由白色與灰色磁磚排列而成的地板，其四個角落的圖形皆如下圖所示，所有灰色磁磚的排列方式亦仿照下圖的形式，則此地板被灰色磁磚所覆蓋的面積占全部面積的比例爲多少？



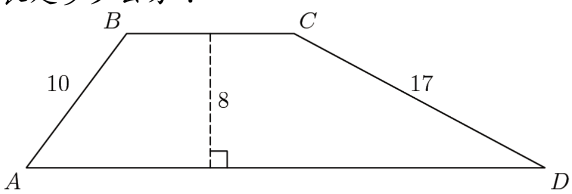
解答: 則此比例爲 6×6 的圖形。而且與 3×3 的圖形面積之比例相同。因此我們可觀察出爲 4 塊灰色區域和 5 塊白色區域。因此所求爲 $\boxed{\frac{4}{9}}$。 □

5. 下列圖形均是由正方形與圓形所構成的，試問哪些圖形中陰影部分的面積最大？



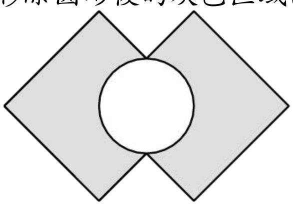
解答: 首先 A 的陰影面積爲 $2^2 - \pi \cdot 1^2 = 4 - \pi$。而 B 的陰影面積爲 $2^2 - 4((\frac{1}{2})^2\pi) = 4 - 4(\frac{\pi}{4}) = 4 - \pi$。因爲正方形面積也可爲對角線相乘除以二，即爲 $\frac{d_1 d_2}{2}$。則 C 的陰影面積爲 $1^2\pi - \frac{2 \cdot 2}{2} = \pi - 2$。所以圖形中陰影的面積最大爲 C。 □

6. 下圖梯形 $ABCD$ 的面積爲 164 平方公分，若高爲 8 公分，$\overline{AB} = 10$ 公分，$\overline{CD} = 17$ 公分。試問 $\overline{BC}$ 邊長是多少公分？



解答: 我們可列式爲 $164 = 8(\frac{\overline{BC}+\overline{AD}}{2}) \Rightarrow \overline{BC} + \overline{AD} = 41$。畫 B 垂直於 $\overline{AD}$ 和 C 垂直於 $\overline{AD}$ 上的輔助線於 E 和 F。且 $\overline{BE}$ 和 $\overline{CF}$ 皆爲 8。且由畢氏定理可得 $\overline{AE} = 6$ 和 $\overline{DF} = 15$，而 $\overline{AD} = \overline{BC} + 21$。因此可得 $\overline{BC} + \overline{BC} + 21 = 41$。故所求之 $\overline{BC} = \boxed{10}$。 □

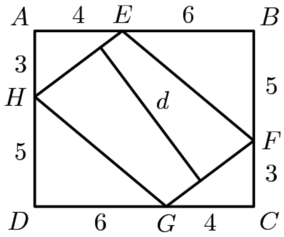
7. 如下圖所示，兩個 4×4 的正方形相交，且相交的邊互相垂直平分。圖中的圓，是以它們兩個交點的距離爲直徑，試問移除圓形後的灰色區域面積爲多少？



解答: 先計算未移除圓形的面積。2 個正方形中間重疊的是邊長爲 2 的正方形。所以面積爲 $4^2+4^2-2^2=28$。又可觀察到圓直徑爲一個 $45°-45°-90°$ 的直角三角形的斜邊爲 $2\sqrt{2}$。因此半徑爲 $\sqrt{2}$，則面積爲 $\pi r^2=\pi(\sqrt{2})^2=2\pi$。

故移除圓形後的灰色部分面積爲 $\boxed{28-2\pi}$。 □

8. 在下圖中 $ABCD$ 爲長方形，$EFGH$ 爲平行四邊形。利用圖中的數據，求同時垂直 $\overline{HC}$ 及 $\overline{FG}$ 的線段長度 d 爲多少？



解答: 由於平行四邊形 $EFGH$ 爲矩形 $ABCD$ 減去四個三角形的面積。因此

$$(4+6)(5+3)-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=80-30-12=38$$

又因爲所求的 d 值爲平行四邊形 $EHGF$ 的 $\overline{FG}$ 上的高。且 $\triangle FGC$ 是 $3-4-5$ 直角三角形。因此 $\overline{FG}=5$，則

$$5d=38\to d=\boxed{7.6}$$ □

9. 請問：四位數中有多少個是 3 的倍數且末兩位數爲 23？

解答: 因爲末兩位各位數和爲 $2+3=5\equiv 2 \pmod 3$，所以前兩位各位數和爲 $1 \pmod 3$，因此和有 1, 4, 7, 10, 13, 16。

若和爲 1，則前兩位數爲 10；

若和爲 4，則前兩位數爲 13, 22, 31, 40；

若和爲 7，則前兩位數爲 16, 25, 34, 43, 52, 61, 70；

若和爲 10，則前兩位數爲 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91；

若和爲 13，則前兩位數爲 49, 58, 67, 76, 85, 94；

若和爲 16，則前兩位數爲 79, 88, 97；

因此有 $1+4+7+9+6+3=30$ 個。 □

10. 請問：在小於或等於 2001 的正整數中，有多少個整數是 3 或 4 的倍數，但不是 5 的倍數？

解答: 利用排容原理，得到

$$\begin{aligned}&\left[\frac{2001}{3}\right]+\left[\frac{2001}{4}\right]-\left[\frac{2001}{12}\right]-\left[\frac{2001}{3\cdot 5}\right]-\left[\frac{2001}{4\cdot 5}\right]+\left[\frac{2001}{3\cdot 4\cdot 5}\right]\\&=667+500-166-133-100+33\\&=801\end{aligned}$$ □

11. 矩形 $ABCD$ 中，$A(6,-22)$, $B(2006,178)$, $D(8,y)$，其中 y 是整數，請問：$ABCD$ 的面積爲何？

解答: 因爲 $ABCD$ 是矩形，因此 斜率$_{AB}\times$ 斜率$_{AD}=-1\Rightarrow \frac{178-(-22)}{2006-6}\cdot\frac{y-(-22)}{8-6}\Rightarrow y=-42$。因爲 $\overline{AB}=\sqrt{2000^2+200^2}=200\sqrt{101}$, $\overline{AD}=\sqrt{2^2+20^2}=2\sqrt{101}$，所以矩形 $ABCD$ 的面積爲 $\overline{AB}\times\overline{AD}=200\sqrt{101}\times 2\sqrt{101}=40400$。 □

12. 實數 $a,\ b,\ c,\ d$ 滿足 $|a-b|=2,\ |b-c|=3,\ |c-d|=4$，請問：$|a-d|$ 所有可能的值之和爲何？

解答: 因爲 $|a-b|=2$，所以得到 $a=b\pm 2$；同理，得到 $b=c\pm 3,\ c=d\pm 4$。將三式合併得到 $a=d\pm 4\pm 3\pm 2$，因此 $|a-d|=|\pm 4\pm 3\pm 2|$，所有可能爲：

$$\begin{aligned}4+3+2&=\boxed{9}\\4+3-2&=\boxed{5}\\4-3+2&=\boxed{3}\\-4+3+2&=\boxed{1}\\4-3-2&=\boxed{-1}\\-4+3-2&=\boxed{-3}\\-4-3+2&=\boxed{-5}\\-4-3-2&=\boxed{-9}\end{aligned}$$

因此所求爲 $1+3+5+9=18$。 □

13. 有一直線通過原點，並與直線 $x=1$ 和直線 $y=1+\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 有相交。這三條線會形成一個正三角形。求這個三角形的周長？

解答: 因爲這個三角形是正三角形，且其中一邊是垂直線，則另外兩條邊斜率就會相反。題目給的另一條邊斜率是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以第三條邊斜率就一定是 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$。因爲第三條線通過原點，所以它的方程式只有 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$。爲了找到三角形的兩個頂點，將 $x=1$ 代入兩個等式：

$$\begin{aligned}y&=-\frac{\sqrt{3}}{3}\\y&=1+\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

我們現在有兩個頂點的坐標：$\left(1,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 和 $\left(1,1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，其中一邊的長度就是 y 坐標之間的距離：$1+\frac{2\sqrt{3}}{3}$。三角形的周長就是 $3\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，所以答案是 $3+2\sqrt{3}$。
□

14. 已知 $f\left(\frac{x}{3}\right)=x^2+x+1$，請問：所有滿足 $f(3z)=7$ 之 z 值總和爲何？

解答: 假設 $y = \frac{x}{3}$，代入得到 $f(y) = (3y)^2 + 3y + 1 = 9y^2 + 3y + 1$，因此 $f(3z) - 7 = 81z^2 + 9z - 6 = 3(9z-2)(3z+1) = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{3}, \frac{2}{9}$，所求爲 $-\frac{1}{3} + \frac{2}{9} = -\frac{1}{9}$。□

15. 假設 a, b, c 皆爲正整數，$a \geq b \geq c$ 且滿足

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 - c^2 + ab &= 2011 \\ a^2 + 3b^2 + 3c^2 - 3ab - 2ac - 2bc &= -1997 \end{aligned}$$

請問：a 值爲何？

解答: 將兩式相加，得到

$$\begin{aligned} 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc &= 14 \\ (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2) &= 14 \\ (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 &= 14 \end{aligned}$$

因爲 a, b, c 皆爲正整數且 $14 = 9 + 4 + 1$，所以推得

$$(a, b, c) = (a, a-1, a-3)$$

或是

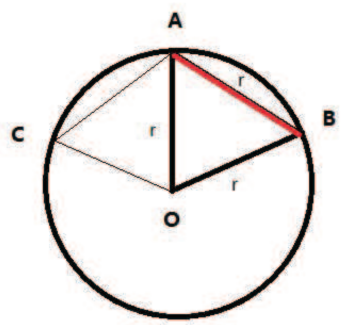
$$(a, b, c) = (a, a-2, a-3)$$

代入檢查

$$\begin{aligned} a^2 - (a-1)^2 - (a-3)^2 + a(a-1) = 2011 &\Rightarrow 7a = 2021 \\ a^2 - (a-2)^2 - (a-3)^2 + a(a-2) = 2011 &\Rightarrow 8a = 2024 \end{aligned}$$

第一式不合，所以 $a = 253$。□

16. 在一個半徑爲 r 的圓周上隨意取兩點，從此兩點依序順時針方向各畫一條長度爲 r 的弦。請問：此兩弦會相交的機率爲何？



解答: 在圓周上取一點 A，找到弦 $\overline{AB} = r$，從圖形中可以知道另一點在弧 CAB 上才會有交點，因此機率爲 $\frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3}$。□

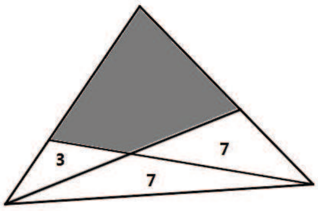
17. 袋中有 2 顆紅球及 2 顆綠球，今從袋中隨機取一球並放入一顆紅球，請問：經過三次取球後，袋中皆爲紅球隊機率爲何？

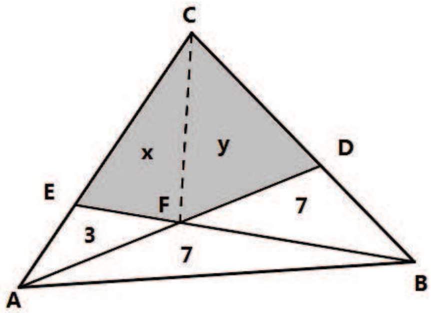
解答: 將三次取球分成三種情形討論，並把紅球記作 R，綠球記作 G

$$\begin{aligned}
&\textbf{(R,G,G):}\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}\\
&\textbf{(G,R,G):}\ \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}\\
&\textbf{(G,G,R):}\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

因此機率爲 $\frac{1}{16}+\frac{3}{32}+\frac{1}{8}=\frac{9}{32}$。 □

18. 一個三角形從兩個頂點各作出一條線，將三角形分成三個三角形及一個四邊形。已知三個三角形的面積分別爲 3, 7, 7，如圖所示。請問：四邊形的面積爲何？

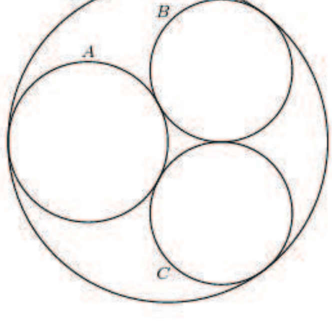


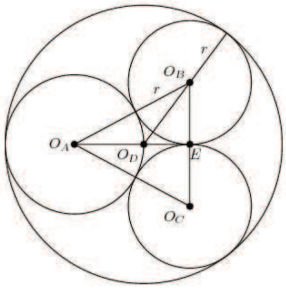


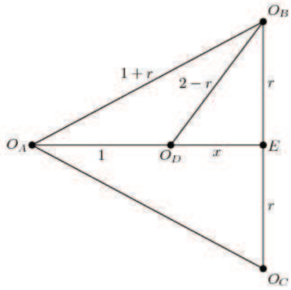
解答: 因爲 $\triangle DBF$ 面積與 $\triangle AFB$ 面積相同，所以 $\overline{AF}=\overline{FD}$。因爲 $\triangle AEF$ 面積與 $\triangle AFB$ 面積比爲 $3:7$，所以 $\overline{EF}:\overline{FB}=3:7$。假設 $\triangle EFC$ 面積爲 x，$\triangle CDF$ 面積爲 y，得到

$$\begin{cases}(3+x):y=1:1\\ x:(y+7)=3:7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{15}{2}\\ y=\frac{21}{2}\end{cases}\Rightarrow \text{灰色面積}=x+y=\frac{15}{2}+\frac{21}{2}=18$$ □

19. 如圖所示，A, B, C 三圓彼此外切且均內切於圓 D。已知 B, C 兩圓全等，圓 A 的半徑爲 1 且通過圓 D 的圓心。請問：圓 B 的半徑爲何？





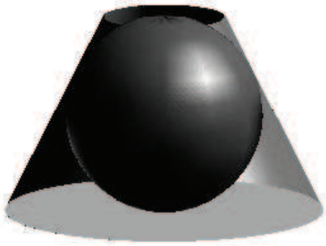


解答: 因爲圓 A 過圓 D 的圓心，且圓 B, C 全等，所以圓 D 半徑爲 2，且 $\triangle O_AO_BO_C$ 爲等腰三角形。假設圓 B 的半徑爲 r，因此圖中的 $x=\sqrt{(2-r)^2-r^2}=\sqrt{4-4r}$，利用畢氏定理得到

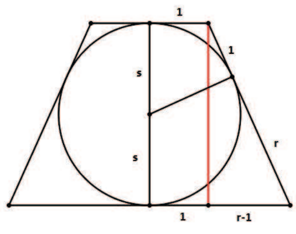
$$\begin{aligned} r^2+\left(1+\sqrt{4-4r}\right)^2=(1+r)^2 &\Rightarrow 1+4-4r+2\sqrt{4-4r}=2r+1 \\ &\Rightarrow 1-r=\left(\frac{6r-4}{4}\right)^2 \\ &\Rightarrow \frac{9}{4}r^2-2r=0 \\ &\Rightarrow r=\frac{8}{9} \end{aligned}$$

□

20. 有一球體被鑲嵌在一個截圓錐體裡，截圓錐體的體積是球體體積的兩倍。請問：截圓錐體頂部的圓半徑與底部的圓半徑比值爲何？



解答: 首先，可以先假設頂部圓半徑爲 1，而底部圓半徑爲 r，其圖形如下



利用畢氏定理 $(r+1)^2=(2s)^2+(r-1)^2 \Rightarrow s=\sqrt{r}$

因爲

$$\begin{cases} V_{\text{截圓錐體}}=\frac{\pi\times h}{3}\left(R^2+r^2+Rr\right) \\ V_{\text{球}}=\frac{4r^3\pi}{3} \end{cases}$$

因此

$$\begin{cases} V_{\text{截圓錐體}}=\frac{\pi\times 2\sqrt{r}}{3}\left(r^2+r+1\right) \\ V_{\text{球}}=\frac{4\left(\sqrt{r}\right)^3\pi}{3} \end{cases}$$

依題意 $V_{\text{截圓錐體}} = 2V_{\text{球}}$，所以

$$
\begin{aligned}
&\frac{\pi \times 2\sqrt{r}}{3}\left(r^2 + r + 1\right) = 2 \times \frac{4\left(\sqrt{r}\right)^3 \pi}{3} \\
\Rightarrow\ & r^2 + r + 1 = 4r \\
\Rightarrow\ & r^2 - 3r + 1 = 0 \\
\Rightarrow\ & r = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} \\
\Rightarrow\ & r = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

□

～全卷完～