

承辦單位：國立中山大學應用數學系

答案：

- | | | | | |
|------------------------|---------------------|------------------------|---------------|--------------------------------------|
| 1. $\frac{11}{21}$ | 2. $\frac{1}{12}$ | 3. 15 | 4. 50° | 5. $\{-4, 0, 4\}$ |
| 6. 15° | 7. 128 | 8. $\frac{S}{r^{n-1}}$ | 9. 8 | 10. 0, 3 |
| 11. $x < 1, x \neq -1$ | 12. $\frac{13}{81}$ | 13. 36 | 14. 6 | 15. $\frac{x(x+2)(x+5)}{(x+1)(x+3)}$ |
| 16. 6 | 17. 15 | 18. $\sqrt{22}$ | 19. $x+2$ | 20. 9 |

注意事項：

1. 本試卷共 20 題計算題，每一題 5 分。
2. 考試時間： 10:00~12:00。
3. 請將詳細步驟書寫於題目下方空白處，答案必須化簡並書寫於上方指定處。
4. 請將學校、姓名及報名編號寫在頁尾指定處。

1. 隨機將一顆公正骰子上的一點抹掉，且每個點被抹掉的機率會相同，然後投擲這顆骰子，求骰子朝上那個面出現奇數點的機率。

解答：骰子中共有 $1+2+\cdots+6=21$ 個點，因為每個點被抹掉的機率相同，則點數為 1 上的點被移除的機率為 $\frac{1}{21}$ ，點數為 2 上的點被移除的機率為 $\frac{2}{21}$ ，以此類推，點數為 6 上的點被移除的機率為 $\frac{6}{21}$ ，故

$$\begin{aligned}
 P(\text{出現奇數點}) &= P(\text{出現奇數點} \mid \text{移除點的面為奇數}) \cdot P(\text{移除點的面為奇數}) \\
 &\quad + P(\text{出現奇數點} \mid \text{移除點的面為偶數}) \cdot P(\text{移除點的面為偶數}) \\
 &= \frac{2}{6} \cdot \frac{1+3+5}{21} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2+4+6}{21} = \frac{11}{21} \quad \square
 \end{aligned}$$

2. 由一圓的圓周上任取三點，求在此三點中，任意兩點間的距離皆會小於圓半徑的機率。

解答：【解法一】 取一圓心為 $O(0,0)$ 的單位圓，令 P, Q, R 分別為圓周上任取的三點，且 $\widehat{AP}=a, \widehat{AQ}=b, \widehat{AR}=c$ ，其中 $A(1,0)$ 為圓上一定點， $a, b, c \in [0, 2\pi)$ 。不失一般性假設 $\widehat{AP}=a = \frac{\pi}{3}$ ，因欲求三點間彼此的距離皆須小於半徑，則

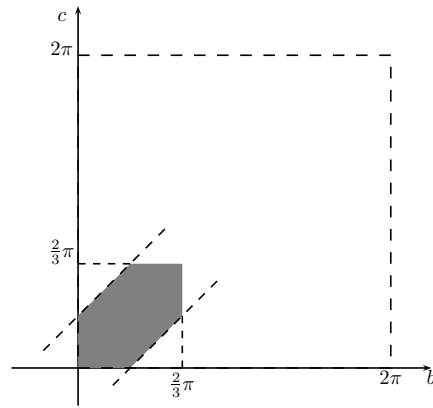
$$0 \leq b \leq \frac{2\pi}{3}, \quad 0 \leq c \leq \frac{2\pi}{3}, \quad \text{且} \quad |b-c| \leq \frac{\pi}{3}$$

故 b 與 c 所推得之範圍如下圖

學校：

姓名：

編號：



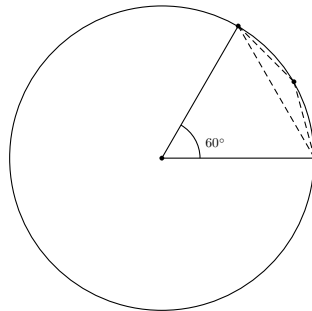
而斜線部分的面積為

$$\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 - 2 \times \left[\frac{1}{2} \times \left(\frac{\pi}{3}\right)^2\right] = \frac{\pi^2}{3}$$

因此所求機率為

$$\frac{\frac{\pi^2}{3}}{(2\pi)^2} = \frac{1}{12}$$

【解法二】 在圓上任取三點，任兩點間的距離接會小於半徑，即表示在所取的三點中，距離最遠的兩點與圓心所形成的圓心角須小於 60° (因若圓心角為 60° 時，呈現一正三角形，則兩取點間的距離即為半徑)，如下圖所示



不失一般性假設所選取三點為 A, B, C ，在圓心角為 60° 的圓周上隨機的散佈，若以順時針方向來觀察，則第一個點可能有 3 種不同的標號，則剩餘的兩點可選取的機率分別為 $\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$ ，故所求機率為

$$\underbrace{3}_{\text{第一個點}} \times \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^2}_{\text{其餘兩點}} = \frac{1}{12} \quad \square$$

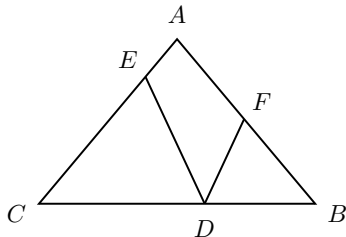
3. 一個人有一分、五分、一角、兩角五分和五角的硬幣 2.73 美元，若他每一種的硬幣數目相等，求他所有的硬幣總數。

解答: 設此人有每種硬幣 x 枚，則

$$(0.01 + 0.05 + 0.1 + 0.25 + 0.5)x = 273$$

解得 $x = 3$ ，所以共有 15 枚。

4. 在下圖中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\angle A = 80^\circ$ ，如果 D 、 E 和 F 點分別在 \overline{BC} 、 \overline{AC} 和 \overline{AB} 邊上，並且 $\overline{CE} = \overline{CD}$ ， $\overline{BF} = \overline{BD}$ ，求 $\angle EDF$ 。



解答： $\angle B = \angle C = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ$ ，所以

$$\angle CDE + \angle BDF = 2 \times \frac{1}{2} \times (180^\circ - 50^\circ) = 130^\circ$$

因此 $\angle EDF = 180^\circ - (\angle CDE + \angle BDF) = 50^\circ$ 。 □

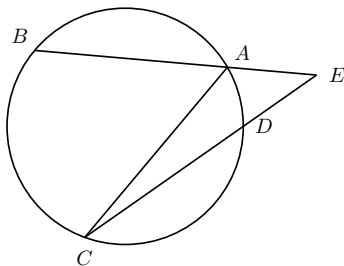
5. 非零實數的每一個三重組 (a, b, c) 構成一個數 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$ ，求如此構成的所有數的集合。

解答：分別討論 a, b, c 的正負，則

- i. 若 a, b, c 均為正數，則 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$ 為 4；
- ii. 若 a, b, c 兩正一負，則 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$ 為 0；
- iii. 若 a, b, c 兩負一正，則 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$ 為 0；
- iv. 若 a, b, c 均為負數，則 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$ 為 -4。

故可知構成的所有數集合為 $\{-4, 0, 4\}$ 。 □

6. 在下圖中， $\angle E = 40^\circ$ ，弧 \widehat{AB} 、弧 \widehat{BC} 和弧 \widehat{CD} 的長都相等，求 $\angle ACD$ 的度數。

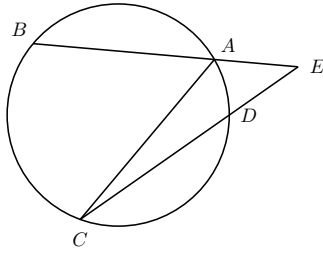


解答：如下圖所示，設 $\widehat{AB} = x^\circ$ ， $\widehat{AD} = y^\circ$ (\widehat{xy} 表示劣弧所對的圓心角)，則

$$3x + y = 360 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}(x - y) = 40 \quad (2)$$

由 (1) 和 (2) 解得 $x = 110$ ， $y = 30$ ，所以 $\angle ACD = \frac{1}{2}y^\circ = 15^\circ$ 。 □



7. 若 $(3x - 1)^7 = a_7x^7 + a_6x^6 + \cdots + a_0$ ，求 $a_7 + a_6 + \cdots + a_0$ 。

解答：將 $x = 1$ 帶入得 $a_7 + a_6 + a_5 + \cdots + a_0 = (3 \times 1 - 1)^7 = 2^7 = 128$ 。 □

8. 設有一個 n 項的等比數列，首項是 1，公比是 r ，和是 S ，其中 r 和 S 均為非零實數。求原數列每一項都用它的倒數取代後所得到的新的等比數列的和。

解答：此和為 $1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^{n-1}} = \frac{1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}}{r^{n-1}} = \frac{S}{r^{n-1}}$ 。 □

9. 求有多少個大於 10、小於 100 的整數，寫成十進位制時，它們的數字交換後，比原數增加 9。

解答：設此數為 tu ，則 $(10u+t) - (10t+u) = 9$ ，則 $u = t+1$ ，得 8 個解 $\{12, 23, \dots, 89\}$ 。 □

10. 若 c 是實數，並且 $x^2 - 3x + c = 0$ 的一個解的乘以 -1 是 $x^2 + 3x - c = 0$ 的一個解，求 $x^2 - 3x + c = 0$ 的解。

解答：設 r 是 $x^2 - 3x + c = 0$ 的解， $-r$ 是 $x^2 + 3x - c = 0$ 的解。所以 $r^2 - 3r + c = 0$ ， $r^2 - 3r - c = 0$ ，則 $c = 0$ ，得方程 $x^2 - 3x = 0$ ，解為 $x = 0, 3$ 。 □

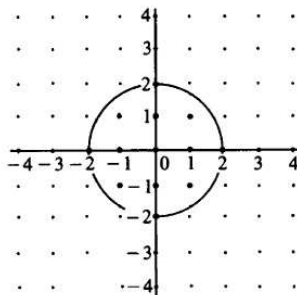
11. 若 x 是實數，求 $(1 - |x|)(1 + x)$ 是正數的充分必要條件。

解答： $(1 - |x|)(1 + x)$ 為正數必須兩因式同號，因此

(i) 同正，則 $|x| < 1$ 且 $1 + x > 0$ ，得 $-1 < x < 1$ 。

(ii) 同負，則 $|x| > 1$ 且 $1 + x < 0$ ，得 $x < -1$ 。 □

12. 在 xy 平面上，其 x, y 座標皆是絕對值小於或等於 4 的整數，且滿足此條件的點被選取之機率皆相同，求從這個點到原點的距離不大於 2 單位的機率。

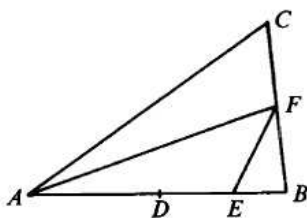


解答：此點的 x, y 座標的可能情況共有 $9 \times 9 = 81$ 種，而與原點距離不大於 2 的點列舉如下

- (1) 當 $x = 0$ 時： y 可為 $0, \pm 1, \pm 2$ ，即表示點 $(0, 0), (0, \pm 1), (0, \pm 2)$ ，共 5 種可能。
- (2) 當 $x = \pm 1$ 時： y 可為 $0, \pm 1$ ，即表示點 $(\pm 1, 0), (\pm 1, \pm 1)$ ，共 6 種可能。
- (3) 當 $x = \pm 2$ 時： y 只能為 0 ，即表示點 $(\pm 2, 0)$ ，共 2 種可能。

綜合上述情況，與原點距離不大於 2 的點共有 $5 + 6 + 2 = 13$ 種可能，故機率為 $\frac{13}{81}$ 。 □

13. 在三角形 ABC 中， D 是 \overline{AB} 的中點， E 是 \overline{DB} 的中點， F 是 \overline{BC} 的中點。若 $\triangle ABC$ 的面積是 96，求 $\triangle AEF$ 的面積。



解答： $\triangle AEF$ 面積 = $\frac{3}{4}\triangle ABF$ 面積 = $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\triangle ABC$ 面積 = $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 96 = 36$ 。 □

14. 某超級市場有 128 箱蘋果，每箱至少有 120 個，至多有 144 個。將裝蘋果個數相同的箱子稱爲一組，其中最大一組的箱子個數爲 n ，求 n 的最小值。

解答：因爲每一箱蘋果的可能個數有 25 種可能，則由鴿籠原理知，最大一組的箱子個數至少有 $\lceil \frac{128}{25} \rceil = 6$ 。 □

15. 若 x 頭奶牛可在 $(x+2)$ 天中得到 $(x+1)$ 桶奶，求 $(x+3)$ 頭奶牛得到 $(x+5)$ 桶奶需要多少天。

解答：一頭奶牛每天產 $\frac{x+1}{x(x+2)}$ 桶奶，則可知共需 $\frac{x(x+2)(x+5)}{(x+1)(x+3)}$ 天。 □

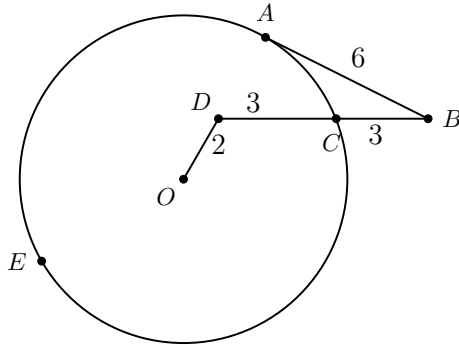
16. 一個凸邊形的內角度數成等差數列，若最小的角是 100° ，最大的角是 140° ，求多邊形的邊數。

解答：設此爲 n 邊形，其內角和爲 $(n-2) \cdot 180$ 度，所以有 $(n-2) \cdot 180 = \frac{n}{2}(100+140)$ ，得 $n = 6$ 。 □

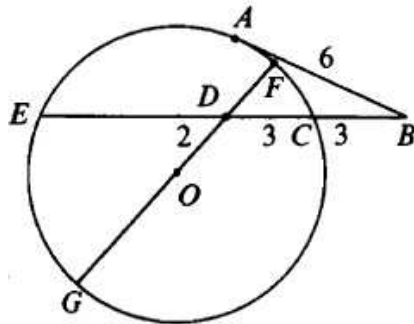
17. 數 1059, 1417, 2312 每個數各除以 d ，若餘數都是 r ，其中 d 是大於 1 的整數，求 $d - r$ 。

解答： d 可整除 $2312 - 1417 = 895$ ，又可整除 $1417 - 1059 = 358$ ，而 895, 358 的最大公因數是 179，且 $d > 1$ ，所以 $d = 179, r = 164$ ，得 $d - r = 15$ 。 □

18. 在下圖中， \overline{AB} 與圓心 O 的圓相切於 A ， D 點在圓內， \overline{DB} 與圓相交於 C ， $\overline{BC} = \overline{DC} = 3$ ， $\overline{OD} = 2$ ， $\overline{AB} = 6$ ，求圓的半徑。



解答：如圖，設 r 為圓的半徑，因為 $\overline{BC} \cdot \overline{BE} = \overline{AB}^2$ ，所以 $3(\overline{DE} + 6) = 36$ ， $\overline{DE} = 6$ ，
又 $\overline{DE} \cdot \overline{DC} = \overline{DF} \cdot \overline{DG}$ ，所以 $18 = r^2 - 4$ ，得 $r = \sqrt{22}$ 。 □



19. 一個多項式 $p(x)$ 當它除以 $x - 1$ 時有餘式 3，當它除以 $x - 3$ 時有餘式 5，求 $p(x)$ 除以 $(x - 1)(x - 3)$ 的餘式。

解答：【解法一】 設 $p(x) = (x - 1)(x - 3)q(x) + ax + b$ ，則 $x = 1$ 時， $p(x) = 3 = a + b$ ； $x = 3$ 時， $p(x) = 5 = 3a + b$ ，解得 $ax + b = x + 2$ 。

【解法二】 由條件可設 $p(x) = (x - 1)(x - 3)q(x) + a(x - 1) + 3$ ，將 $x = 3$ 代入得 $p(3) = a(3 - 1) + 3 = 5$ ，因此 $a = 1$ ，餘式為 $x + 2$ 。 □

20. 求最小正奇整數 n 能使乘積 $2^{\frac{1}{7}} \cdot 2^{\frac{3}{7}} \cdots 2^{\frac{2n+1}{7}}$ 大於 1000。(在乘積中，指數的分母都是 7，分子是從 1 到 $2n + 1$ 的連續奇數)

解答： $2^{\frac{1}{7}} \cdot 2^{\frac{3}{7}} \cdots 2^{\frac{2n+1}{7}} = 2^{\frac{(n+1)^2}{7}}$ ，且 $2^{10} = 1024$ ，有 $2^{\frac{(7+1)^2}{7}} = 2^{9\frac{1}{7}} < 2^9 \cdot 2^{\frac{1}{2}} < 1000 < 2^{10} < 2^{\frac{(8+1)^2}{7}}$ ，又 n 為奇數，故 n 最小為 9。 □

~全卷完~