

承辦單位：國立中山大學應用數學系

答案：

- |                  |       |                        |                  |                   |
|------------------|-------|------------------------|------------------|-------------------|
| 1. $\frac{1}{4}$ | 2. 5  | 3. 1-2                 | 4. 3             | 5. 8              |
| 6. 14            | 7. 71 | 8. 33                  | 9. $\frac{5}{6}$ | 10. $\frac{1}{2}$ |
| 11. 84           | 12. 3 | 13. $\frac{15}{8}$     | 14. 80           | 15. 69            |
| 16. 39           | 17. 2 | 18. $16\pi \approx 50$ | 19. 505          | 20. 4             |

注意事項：

1. 本試卷共 20 題計算題，每一題 5 分。
2. 考試時間：10：00~12：00。
3. 請將詳細步驟書寫於題目下方空白處，答案必須化簡並書寫於上方指定處。
4. 請將學校、姓名及報名編號寫在頁尾指定處。

1. 有八個數字排成一列，其中每一個數均由前兩數相乘而得到，今天列出最後三個數字，試問第一個數字為多少？

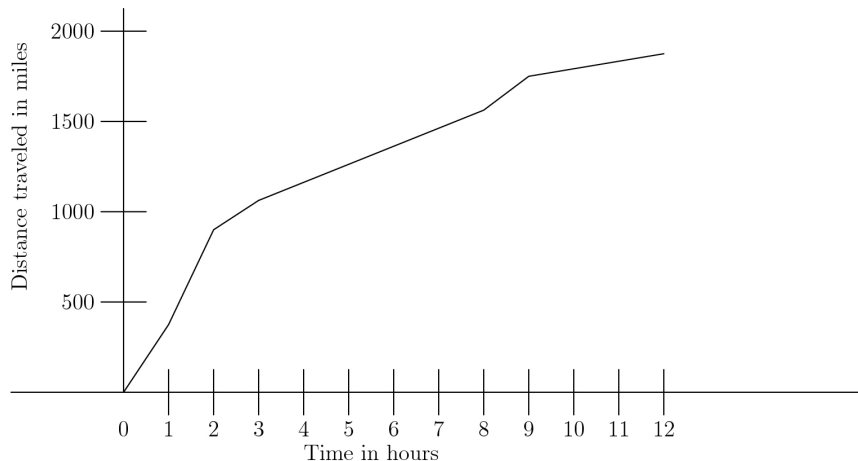
? , \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ , 16 , 64 , 1024

解答：我們可以用倒推的  $16 \times 64 = 1024$  倒推後得到  $1024 \div 64 = 16$ 。故  $64 \div 16 = 4$ ,  $16 \div 4 = 4$ ,  $4 \div 4 = 1$ ,  $4 \div 1 = 4$ ,  $1 \div 4 = \frac{1}{4}$ 。 □

2. 一群學生 ( $\geq 2$  人) 圍著一圓桌坐著，他們開始傳遞一個裝有 100 顆糖果的袋子，每人輪流拿一顆，再傳給下一個人。如果克莉絲是拿到第一顆和最後一顆糖果的人，則坐在圓桌邊的學生人數可能有幾種可能？

解答：因為克莉絲是拿到第一顆和最後一顆糖果的人，則表示學生人數共有  $x$  人的時候，拿了  $y$  輪後，共拿了  $xy = 100 - 1 = 99$  顆，此時恰好剩一顆留給克莉絲拿。故學生人數為 99 的正因數，3, 9, 11, 33, 99。 □

3. 一實驗性飛機旅程，其旅程距離時間如圖所示，試問在下列哪段時間內，飛機的速度為最快？



學校：

姓名：

編號：

解答：如圖所示，在 (1 - 2) 之間飛機大概飛了 500 英里。其速度大概是 500 英哩一小時，而其他任一段時間內的速度均不超過 350 英哩一小時。 □

4. 以天秤秤重，若三個  $\triangle$  和一個  $\diamond$  重量等於九個  $\bullet$ ，一個  $\triangle$  重量等於  $\diamond$  加上  $\bullet$  的總重。



試問兩個  $\diamond$  等於多少個  $\bullet$ ？

解答：假設  $\triangle = a$ ,  $\diamond = b$ ,  $\bullet = c$ , 則

$$3a + b = 9c$$

$$a = b + c$$

我們的目標是  $2b$  可以代換幾個  $c$ , 因此我們將上式的  $a$  換成  $b + c$ , 得到

$$4b = 6c \Rightarrow 2b = 3c$$

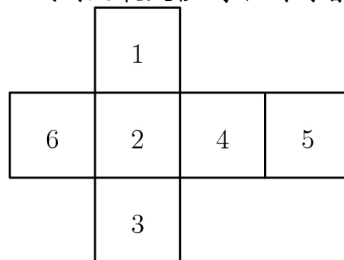
故我們得到  $2\diamond = 3\bullet$ 。 □

5. 若一個  $3 \times 3$  的九個格子中只能塗滿其中兩個格子，以形成一個圖樣，且每個圖樣經過任意旋轉或翻轉後，可以和其他圖樣吻合，則都視為同一種圖形。如以下例子，此四個圖樣都看做同一種圖形。試問，依此規則可以塗出多少種不同的圖樣？



解答：根據對稱性可以先考慮角落有被塗色的圖樣，共有五種。在考慮角落都沒有被塗色的圖樣，共有三種。故總共有八種不同的圖樣。 □

6. 如圖，可沿著線摺成一個表面有數字的正立方體，每個頂點都和三個數相鄰，若其中某個頂點相鄰的三個數之和最大，試問此最大值為下列何者？

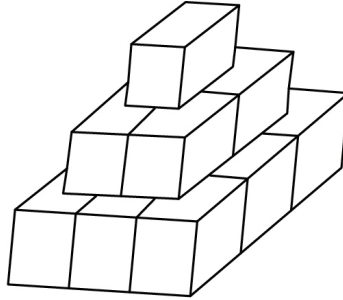


解答：每個數除了相對的數以外，都可以和其他數與某一個頂點相鄰。所以所有的組合中  $1 - 3$ ,  $2 - 5$ ,  $4 - 6$  都不可能發生，故最大的和為  $6 + 5 + 3 = 14$ 。 □

7. 捷克有一袋裝有 128 個蘋果的袋子，他賣了 25% 其中給小明，後來他把剩下的蘋果賣了 25% 給小珍，最後他袋子剩下的蘋果中，他又給了他的老師一顆最好的蘋果，所以他還剩多少顆蘋果？

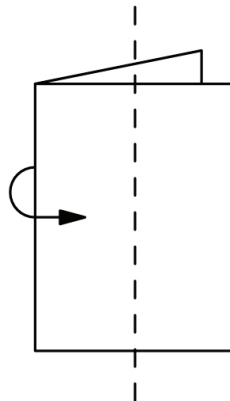
解答：第一次給了  $128 \times 0.25 = 32$  給小明，所以還剩  $128 - 32 = 96$ 。後來又給了小珍  $96 \times 0.25 = 24$  顆蘋果，所以還剩下  $96 - 24 = 72$ ，最後再給一顆給老師，故剩下 71。 □

8. 一個藝術家有十四塊正立方體，每塊的邊長都是一公尺，他將他們數在地上形成如圖所示的雕刻品，然後他要將露在外面的部份塗上油漆，則他總共要塗多少平方公尺？



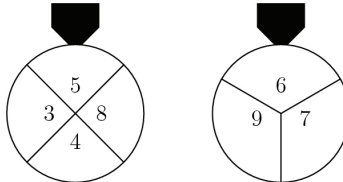
解答：最下側邊層有 12 個完整的面，最下層朝上的有 4 個  $\frac{1}{2}$  的面和 4 個  $\frac{3}{4}$  的面，中間側邊層有 8 個完整的面，中間層朝上的有 4 個  $\frac{3}{4}$  的面，最頂層有五個完整的面，所以總共  $12 + 4 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{3}{4} + 8 + 4 \times \frac{3}{4} + 5 = 33$  平方公尺。 □

9. 假設有一張正方形的只從中間對摺後，再沿著正中央的虛線剪開就可以展開成三個矩形(一大和兩小)，則小的矩形與大的矩形的周長比值為多少？



解答：假設原本正方形的邊長為 4 單位，則大矩形和小的矩形邊長分別為 4, 2 以及 1, 4，因此周長比為  $\frac{1+4+4+1}{2+4+4+2} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ 。 □

10. 有兩個輪盤同時旋轉，指標會指出兩個數字，則指出的兩個數字和為偶數的機率為多少？



解答：已知道奇數加奇數為偶數，偶數加偶數為偶數。第一個輪子轉出奇數的機率為  $\frac{1}{2}$ ，偶數機率為  $\frac{1}{2}$ 。第二個輪子轉出奇數的機率為  $\frac{2}{3}$ ，偶數機率為  $\frac{1}{3}$ 。故相乘出現偶數的機率為  $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 。 □

11. 同時投擲 7 個公正的 6 面骰子，若頂面點數總和為 10 的機率可表示為  $\frac{n}{6^7}$ ，則  $n$  為多少？

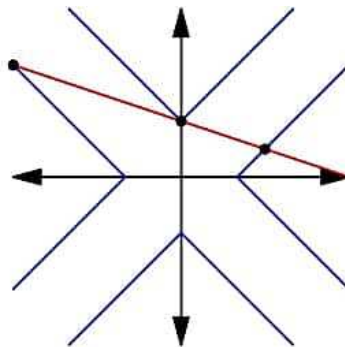
解答：【解法一】 骰子的最小值為 1，因此 7 個骰子的頂面的最小可能總和為 7。為了使總和恰好為 10，1 到 3 個骰子的頂面加總必須為 3。有三種方法可以做到這一點：3, 2+1 和 1+1+1。情況一：有 7 種；情況二：有  $7 \cdot 6 = 42$  種；情況三：有  $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35$  種。因此答案為  $7 + 42 + 35 = 84$ 。

【解法二】 7 個骰子投擲總和為 10 可以用星星和酒吧表示，有 10 顆星星和 6 個酒吧。每顆星代表骰子面上的一個點，酒吧表示不同骰子之間的區隔。但是，我們必須注意，每個骰子在面上至少有一個點，所以必須預先確定 7 顆星星。剩下 3 顆星星和 6 個酒吧，可重新整理成  $\binom{9}{3} = 84$  種方式。 □

12. 有多少個實數序對  $(x, y)$  同時滿足下列兩方程式？

$$\begin{aligned}x + 3y &= 3 \\||x| - |y|| &= 1\end{aligned}$$

解答：【解法一】 我們可以通過繪製方程式來解此題目。將題目中第二個方程式繪製在第一象限中(內部絕對值符號可以忽略)，然後將該圖反映到其他像限中，如圖所示。由上圖很容易就看到有 3 個交點。



【解法二】  $x + 3y = 3$  可重新改寫成  $x = 3 - 3y$ ，將該式代至題目中的第二個方程式，可得  $||3 - 3y| - |y|| = 1$ 。將此問題分解為  $y$  範圍的情況，將可得出解的總數：

情況一：  $y > 1$ ,  $3 - 3y$  將為負數，所以  $|3 - 3y| = 3y - 3$ ,  $|3y - 3 - y| = |2y - 3| = 1$ 。

(1)  $y > \frac{3}{2}$

$2y - 3$  為正數，所以  $2y - 3 = 1 \Rightarrow y = 2$  且  $x = 3 - 3(2) = -3$ 。

(2)  $1 < y < \frac{3}{2}$

$2y - 3$  為負數，所以  $|2y - 3| = 3 - 2y = 1 \Rightarrow 2y = 2$  且是沒有解( $y$  不能等於 1)。

情況二：  $y = 1$ , 顯然的， $x = 0$ 。

情況三：  $y < 1$ ,  $3 - 3y$  為正數，所以  $|3 - 3y - y| = |3 - 4y| = 1$ 。

(1)  $y > \frac{4}{3}$

$3 - 4y$  為負數，所以  $4y - 3 = 1 \Rightarrow 4y = 4$ 。這沒有解( $y$  不能等於 1)。

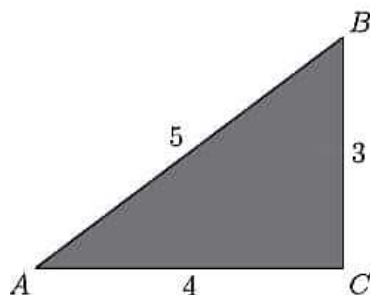
$$(2) y < \frac{4}{3}$$

$3 - 4y$  為正數，所以  $3 - 4y = 1 \Rightarrow 4y = 2 \circ y = \frac{1}{2}$  且  $x = \frac{3}{2}$ 。

因此，解為： $(-3, 2)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ ，答案為 3。

**【解法三】** 注意到， $||x| - |y||$  可以取以下四個值中的任意一個： $x + y$ ,  $x - y$ ,  $-x + y$ ,  $-x - y$ 。求解方程我們得到了三個解： $(0, 1)$ ,  $(-3, 2)$ ,  $(1.5, 0.5)$ 。所以答案為 3。□

13. 邊長分別為 3, 4, 5 公寸的三角形紙片，如下圖所示。若將此紙片摺疊使得點  $A$  與點  $B$  重合，則摺痕長為多少公寸？



解答：首先，我們需要知道摺線就是邊長  $\overline{AB}$  的垂直平分線，即直角三角形  $\triangle ABC$  的斜邊。稱  $\overline{AB}$  的中點為  $D$ 。繪製這條線並稱此交點與  $\overline{AC}$  交於  $E$ 。現在，根據  $AA$  相似， $\triangle ABC$  和  $\triangle ADE$  為相似。設定比率，我們發現

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{\overline{DE}}{5/2} \Rightarrow \overline{DE} = \frac{15}{8}$$

因此，答案為  $\frac{15}{8}$ 。□

14. 小於或等於  $\frac{3^{100} + 2^{100}}{3^{96} + 2^{96}}$  的最大整數是多少？

解答：**【解法一】**

$$\begin{aligned} \frac{3^{100} + 2^{100}}{3^{96} + 2^{96}} &= \frac{2^{96} (3^{100}/2^{96}) + 2^{96}(2^4)}{2^{96}(3/2)^{96} + 2^{96}(1)} = \frac{3^{100}/2^{96} + 2^4}{(3/2)^{96} + 1} \\ &= \frac{3^{100}/2^{100} \cdot 2^4 + 2^4}{(3/2)^{96} + 1} = \frac{2^4(3^{100}/2^{100} + 1)}{(3/2)^{96} + 1} \end{aligned}$$

我們可以忽略 1，因為它們不會真的影響分數。所以，答案會非常接近，但比新分數少。

$$\frac{2^4(3^{100}/2^{100} + 1)}{(3/2)^{96} + 1} < \frac{2^4(3^{100}/2^{100})}{(3/2)^{96}}$$

$$\frac{2^4(3^{100}/2^{100})}{(3/2)^{96}} = \frac{3^4}{2^4} \cdot 2^4 = 3^4 = 81$$

所以，我們的最終答案非常接近但不是 81，因此小於數字的最大整數是 80。

【解法二】 令  $x = 3^{96}$  和  $y = 2^{96}$ 。那麼我們的分數可以寫成

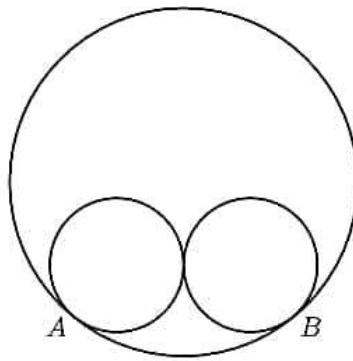
$$\frac{81x + 16y}{x + y} = \frac{16x + 16y}{x + y} + \frac{65x}{x + y} = 16 + \frac{65x}{x + y}$$

注意到， $\frac{65x}{x+y} < \frac{65x}{x} = 65$ 。所以， $16 + \frac{65x}{x+y} < 16 + 65 = 81$ 。而我們唯一的答案選擇要小於 81，也就是 80。

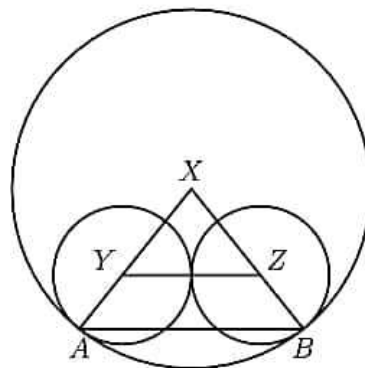
【解法三】 令  $x = \frac{3^{100} + 2^{100}}{3^{96} + 2^{96}}$ ，將兩邊同乘  $(3^{96} + 2^{96})$ ，並展開。重新整理各項數後，可得  $3^{96}(3^4 - x) + 2^{96}(2^4 - x) = 0$ 。等號左邊的式子是嚴格遞減，且當  $x = 81$  其值為負數，這意味著，答案必須是小於 81，因此答案為 81。

□

15. 兩個半徑為 5 的小圓彼此外切，且分別內切於一個半徑為 13 的圓於  $A$ 、 $B$  兩點，如下圖所示。若  $\overline{AB}$  可被寫成  $\frac{m}{n}$ ，其中  $m$ 、 $n$  為互質的正整數，則  $m + n$  為多少？



解答：【解法一】 令周圍的圓中心為  $X$ 。在  $A$  點相切的圓，將會以  $Y$  點為中心。同樣

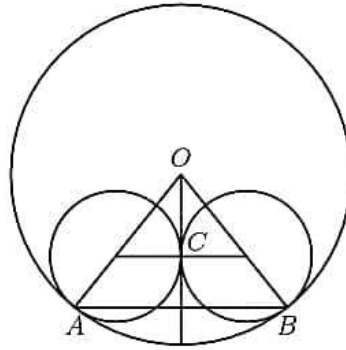


地，在  $B$  點相切的圓，將會以  $Z$  點為中心。將  $\overline{AB}$ 、 $\overline{YZ}$ 、 $\overline{XA}$  和  $\overline{XB}$  連接起來。現在觀察到  $\triangle XYZ$  和  $\triangle XAB$  是相似的，寫出比例，可得

$$\frac{\overline{XY}}{\overline{XA}} = \frac{\overline{YZ}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{13 - 5}{13} = \frac{5 + 5}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{8}{13} = \frac{10}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{65}{4}$$

因此，答案為  $65 + 4 = 69$ 。

【解法二】 令大圓的中心為  $O$ ，兩個較小圓的公切線為  $C$ 。繪製大圓的兩個半徑， $\overline{OA}$  和  $\overline{OB}$ ，以及小圓的兩個半徑指到點  $C$ 。繪製射線  $\overrightarrow{OC}$  和  $\overline{AB}$ ，這使我們



得到了相似三角形，因此可解此問題。根據畢式定理，斜邊的長度是 8，另一條邊為 5。利用相似三角形， $\overline{OB} = 13$ ，且  $\overline{AB}$  的一半為  $\frac{65}{8}$ 。因此其兩倍為  $\frac{65}{4}$ ，得出答案為  $65 + 4 = 69$ 。 □

16. 7 個標準骰子的面都標有從 1 到 6 的整數。假設  $p$  是所有 7 個骰子投擲的機率，頂部數字的總和為 10。發生與  $p$  具有相同機率的其它總和是多少？

解答：【解法一】 可以看出，盡可能投擲最小數字的機率與投擲最大數字的機率相同，投擲第二小數字的機率可能與投擲第二大數字的機率相同，等等。

這是因為有多種方法可以將 7 種增加一定數量的方法與從 7 個 6 的組合中拿出一定數量的方法相同。

所以，我們可以匹配這些值來找出與 10 相同機率的和。我們可以開始注意到，7 是最小可能投擲數，而 42 是最大可能投擲數。具有相同機率對如下所示：

$$(7, 42), (8, 41), (9, 40), (10, 39), (11, 38), \dots$$

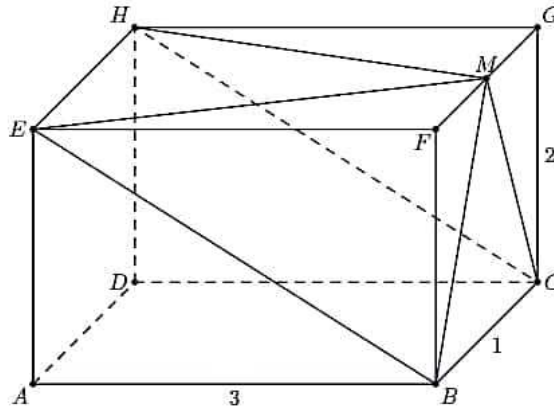
但是，我們需要找到與 10 匹配的數字。所以，我們可以在 (10, 39) 停止，並推得等於 10 的機率總和為 39。所以答案為 39。

【解法二】 我們假設未知數為  $x$ 。根據對稱性，我們知道 10 和最小值之間的差值等於最大值和  $x$  之間的差值。所以， $10 - 7 = 42 - x \implies x = 39$ 。

【解法三】 對於總和具有相等的機率，7 個骰子的兩個集合平均總和必須是  $(6 + 1) \times 7 = 49$ 。因為有 10 與沒有 10 是相似的，所以只須從期望的總和中減去 10， $49 - 10 = 39$ 。

【解法四】 骰子投擲的總和其期望值是  $3.5 \cdot 7 = 24.5$ ，且因為機率應該對稱得分佈，答案是  $24.5 + 24.5 - 10 = 39$ 。 □

17. 在矩形平行六面體如下圖所示， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{BC} = 1$  和  $\overline{CG} = 2$ 。點  $M$  是  $\overline{FG}$  的中點。矩形金字塔其底部  $BCHE$  和頂點  $M$  的體積是多少？



解答：【解法一】 考慮橫截面平面並將其面積標記為  $b$ 。注意到，包圍金字塔的三棱柱的體積為  $bh/2 = 3$ ，且我們希望矩形金字塔與三棱柱有共同的底部與高度。金字塔的體積是  $\frac{bh}{3}$ ，所以答案為 2。

【解法二】 我們可以從平行六面體的總體積開始找。它是  $2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$ ，因為長方體是矩形棱柱。接下來，我們可以考慮當平面  $BCHE$  切此外形時所形成的楔形截面。

我們可以找到三角形金字塔的底部  $EFB$  和頂點  $M$ 。 $EFB$  的面積是  $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$ 。因為  $\overline{BC} = 1$ ，所以我們有  $\overline{FM} = \frac{1}{2}$ 。利用三角形金字塔體積公式，可得  $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{1}{2}$ 。此外，由於三角形金字塔其底部  $HGC$  和頂點  $M$  具有完全相同的尺寸，所以體積也是  $\frac{1}{2}$ 。

在最後一步考慮的原始楔形體積為 3，因為它是平行六面體體積的一半。而我們可以減去這部份，可得  $3 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2$ 。因此，我們可得到外形的體積為 2。 □

18. 線段  $\overline{AB}$  是圓的直徑有  $\overline{AB} = 24$ 。當點  $C$  在圓周上移動時， $\triangle ABC$  的重心，其軌跡為一條封閉曲線缺少兩點。對於最接近的正整數，該曲線所圍區域的面積是多少？

解答：【解法一】 假設  $A = (-12, 0), B = (12, 0)$ 。因此， $C$  位於圓方程式  $x^2 + y^2 = 144$ 。令它具有坐標  $(x, y)$ 。因為我們知道三角形其  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$  的頂點坐標為  $(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$ ， $\triangle ABC$  的質心是  $(\frac{x}{3}, \frac{y}{3})$ 。因為  $x^2 + y^2 = 144$ ，又我們知道  $(\frac{x}{3})^2 + (\frac{y}{3})^2 = 16$ ，所以，曲線是一個以原點為中心的圓，它的面積是  $16\pi \approx 50$ 。

【解法二】 我們知道三角形的質心是將線段以比例 2 : 1 切分，並且到圓的中心其三角形的中值是半徑 12，所以從三角形的中心到圓的中心其長度為  $\frac{1}{3} \cdot 12 = 4$ 。半徑為 4 的圓面積為  $16\pi$ ，大約為 50。 □

19. 數列 101, 1001, 10001, 100001, ... 前 2018 項的數有多少項可以被 101 整除？

解答：【解法一】 注意到，對於一些奇數  $k$ ， $10^{2k} + 1$  將會滿足  $\pmod{101}$ 。每一個  $2k$  會在  $\{2, 4, 6, \dots, 2018\}$  中，所以答案是 505。

【解法二】 如果我們將每個數字除以 101，則就會看到每個數字 4 都有一個模式：101, 100001, 1000000001, ...。將 2018 除以 4 得到 504 又剩下 2。一個可分割的數字將會剩下 2，所以答案是 505。



**【解法三】** 注意到，909 可以被 101 整除，因此，9999 也可以被 101 所整除。我們知道 101 是可被整除的，但不可被 1001 整除，所以可從 10001 開始。計算  $10001 - 9999 = 2$ 。同樣的，計算  $100001 - 9999 \cdot 10 = 11$ 。持續用此方式，計算  $1000001 - 99990 \cdot 10 = 101$ 。遵循相同的方式，可利用  $(\text{mod } 101)$  來完成此題。數列將會減去 1，乘以 10，再加上 1。因此數列為  $0, -9, -99(2), 11, 0, \dots$ ，它每四個重複一次。考慮第一項之後的數列，有 2017 個數字。將 2017 除以 4 得到 504 餘 1。因此，答案為 504 加上第一項 1 等於 505。□

20. 假設  $a_1, a_2, \dots, a_{2018}$  是一個嚴格遞增的正整數數列，使得

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2018} = 2018^{2018}$$

當  $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2018}^3$  除以 6 的餘數是多少？

解答：**【解法一】** 根據 Euler's Totient 定理， $n^3 \equiv n \pmod{6}$ 。或者，可以簡單地列出所有的餘數到第三個冪次  $\pmod{6}$ 。因此答案與  $2018^{2018} \equiv 2^{2018} \pmod{6} = 4$  一致。

**【解法二】** 注意到，

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_{2018})^3 &= a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2018}^3 + 3a_1^2(a_1 + a_2 + \dots + a_{2018} - a_1) \\ &\quad + 3a_2^2(a_1 + a_2 + \dots + a_{2018} - a_2) + \dots \\ &\quad + 3a_{2018}^2(a_1 + a_2 + \dots + a_{2018} - a_{2018}) + 6 \prod_{i \neq j \neq k}^{2018} a_i a_j a_k \end{aligned}$$

又注意到，

$$\begin{aligned} &a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2018}^3 + 3a_1^2(a_1 + a_2 + \dots + a_{2018} - a_1) + \\ &3a_2^2(a_1 + a_2 + \dots + a_{2018} - a_2) + \dots + \\ &3a_{2018}^2(a_1 + a_2 + \dots + a_{2018} - a_{2018}) + 6 \prod_{i \neq j \neq k}^{2018} a_i a_j a_k \\ \equiv &a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2018}^3 + 3a_1^2(2018 - a_1) + 3a_2^2(2018 - a_2) + \dots + 3a_{2018}^2(2018 - a_{2018}) \\ \equiv &-2(a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2018}^3) \pmod{6} \end{aligned}$$

因此， $-2(a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2018}^3) \equiv (2018^{2018})^3 \equiv (2^{2018})^3 \equiv 4^3 \equiv 4 \pmod{6}$ 。因此， $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2018}^3 \equiv 1 \pmod{3}$ ，但是，因為立方保持奇偶性，而且各個項之和為偶數，也有些立方也是偶數，答案為 4。

**【解法三】** 我們首先注意到  $1^3 + 2^3 + \dots = (1 + 2 + \dots)^2$ 。所以我們可以找到  $(2018^{2018})^2 = (2018^{4036}) \pmod{6}$ 。另外也注意到  $2018 \equiv 2 \pmod{6}$  且看到  $2^1 \equiv 2 \pmod{6}$ ,  $2^2 \equiv 4 \pmod{6}$ ,  $2^3 \equiv 2 \pmod{6}$ ,  $2^4 \equiv 4 \pmod{6}$  等等。所以，我們看到因為  $(2^{4036})$  有偶數次方，它必須是  $(\text{mod } 6)$  同餘 4，得出答案為 4。□

~全卷完~