

承辦單位：國立中山大學應用數學系

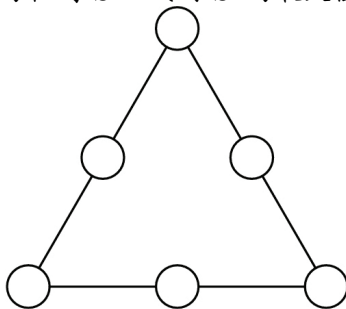
答案：

- | | | | | |
|-------------------|-------------------|--------------|--------------------|----------------------|
| 1. 39 | 2. 50 | 3. 星期三 | 4. 1 | 5. $\frac{4}{9}$ |
| 6. $\frac{17}{6}$ | 7. 17 | 8. $\pi + 2$ | 9. 56 | 10. $\frac{123}{40}$ |
| 11. $\frac{1}{2}$ | 12. $\frac{5}{3}$ | 13. 3722 | 14. $\frac{4}{11}$ | 15. 1 |
| 16. $\frac{3}{2}$ | 17. 5 | 18. 16 | 19. $\frac{3}{2}$ | 20. 1 |

注意事項：

1. 本試卷共 20 題計算題，每一題 5 分。
2. 考試時間：10：00~12：00。
3. 請將詳細步驟書寫於題目下方空白處，答案必須化簡並書寫於上方指定處。
4. 請將學校、姓名及報名編號寫在頁尾指定處。

1. 如圖，一個三角形上的圓圈內都放入 10 到 15 間的六個整數。且每一邊三個圓圈的和都相等，假設每一邊三個圓圈的和為 S ，試問 S 的最大值可能為多少？



解答：假設在上面圓圈中的數字是 a ，往下順時針假設 b, c, d, e, f ，故有

$$S = a + b + c$$

$$S = c + d + e$$

$$S = e + f + a$$

相加起來得到

$$\begin{aligned} 3S &= (a + b + c + d + e + f) + (a + c + e) \\ &= 75 + (a + c + e) \end{aligned}$$

且可以知道 $a + b + c + d + e + f$ 為 $10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 75$ 。得到 $S = \frac{75}{3} + \frac{a+c+e}{3}$ ，其中 $a + c + e$ 取最大 $15 + 14 + 13 = 42$ ，故得到 $S = 39$ ，所以 $a = 15, b = 10, c = 14, d = 12, e = 13, f = 11$ 。□

2. 國王中學有 1200 位學生。每個學生一天上 5 堂課。每位教師一天教 4 堂課。每班都有 30 位學生和 1 位老師。試問國王中學有幾位教師？

學校：

姓名：

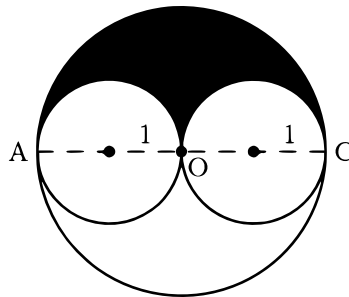
編號：

解答：如果每個學生都要上 5 堂課，而且共有 1200 學生，那麼他們共要上 $5 \times 1200 = 6000$ 堂課。且知道每個班都有 30 學生，所以每一班需要上要 $\frac{6000}{30} = 200$ 堂課。每班都有 1 個老師，所以老師們總共要上 200 堂課。每位教師都會教 4 堂課，所以如果有 T 個老師，他們會有 $4T$ 堂課。故 $4T = 200 \Rightarrow T = 50$ 。 □

3. 在某一年中，一月份有四個星期二和星期六，試問當年一月一號為禮拜幾？

解答：一月中有完整四個星期再多三天，且每一個星期中都必定含有禮拜四以及禮拜六。且剩餘三天為連續，所以剩餘的三天必定是禮拜三、禮拜四、禮拜五。由此可以知道禮拜三需要再 29 號，所以可以知道 22, 15, 8, 1 都是禮拜三，故答案為星期三。 □

4. 大圓圈有直徑 \overline{AC} 。這兩個小圓圈的圓心在 \overline{AC} 上，且大圓的圓心 O 位於兩小圓的切點上。如果每個小圓半徑都為 1，試問陰影區域的面積與其中一個小圓的面積的比值是多少？



解答：小圓半徑為 1，故面積為 π 。大圓半徑為 2，故面積為 4π 。過 \overline{AC} 的兩個半圓面積為 π 。則陰影部分面積為 $2\pi - \pi = \pi$ ，故可以得知比例為 $\frac{\pi}{\pi} = 1$ 。 □

5. 畫有編號 1 到 10 的球放進同一個罐子中。傑克從罐子中隨機取出一個球，且不放回。然後吉爾再隨機取出一球。試問取出兩球的號碼相加為偶數的機率為多少？

解答：兩數相加為偶數的組合必定是，奇數加奇數或偶數加偶數。故兩次取出都是奇數的機率為 $\frac{5}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$ 。且兩次取出都是偶數的機率為 $\frac{5}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$ 。故答案為 $\frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$ 。 □

6. 在 $\triangle ABC$ 中 $\overline{AB} = 6$, $\overline{AC} = 8$, $\overline{BC} = 10$ ，且 D 為 \overline{BC} 之中點。試問 $\triangle ADB$ 和 $\triangle ADC$ 的圓內切半徑和？

解答：我們注意到畢氏定理的逆應用 $\triangle ABC$ 是一個直角三角形，且直角為 A 。因此 $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD} = 5$ ，面積 $ADB = ADC = 12$ 。因為 $A = rs$ ，故 $\triangle ADB = \frac{12}{(5+5+6)/2} = \frac{3}{2}$ 。所以 $\triangle ADC$ 的圓內切半徑為 $\frac{12}{(5+5+8)/2} = \frac{4}{3}$ 。把兩者加在一起得到 $\frac{17}{6}$ 。 □

7. 在四位正整數 $abcd$ 中，其中 $a \neq 0$ ，具有 3 個二位整數 $ab < bc < cd$ 的性質而形成一遞增等差數列，請問這種四位數有幾個？(如 4692 即 $a = 4, b = 6, c = 9, d = 2$ 具有此性質。)

解答：依題意可得到三數為 $10a+b, 10b+c$ ，與 $10c+d$ ，且滿足 $a \leq b \leq c$ 。為了滿足為等差數列，所以 $(10c+d) - (10b+c) = (10b+c) - (10a+b)$ ，即 $10(c-2b+a) = 2c-b-d$ 。但是 $0 < a \leq b \leq c < 10$ ，所以可以分為兩類 $a+c-2b=1, a+c-2b=0$ 。

Case 1: $a+c-2b=1$

當 $c=9$ ，可得到 $b+d=8, 2b-a=8$ ，即我們可以知道 $b = \frac{8+a}{2}$ ，所以 $5 \leq b \leq 8$ 。這樣可以得到 2593, 4692, 6791, 8890。當 $c=8$ ，可得到 $b+d=6, 2b-a=7$ ，即我們可以知道 $b = \frac{7+a}{2}$ ，所以 $4 \leq b \leq 6$ 。這樣可以得到 1482, 3581, 5680。當 $c=7$ ，可得到 $b+d=4, 2b-a=6$ ，即我們可以知道 $b = \frac{6+a}{2}$ ，所以 $b=4$ 。這樣可以得到 2470。當 $c=6$ ，找不到解。

Case 2: $a+c-2b=0$

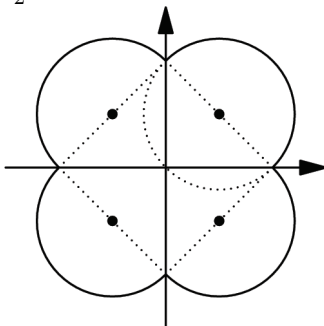
這表示 a, b, c 成等差數列，所以可以得到 1234, 1357, 2345, 2468, 3456, 3579, 4567, 5678, 6789。而我們全部的答案為 17 個。 □

8. 方程式 $x^2 + y^2 = |x| + |y|$ 之圖形所圍成區域之面積為何？

解答：考慮 $x > 0, y > 0$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x + y \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

圓與座標軸交於 $(0, 1)$ 和 $(1, 0)$ ，且圓的半徑為 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，而此面積可分成半圓與三角形，其面積為 $A = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$



再由對稱性，我們可得到面積為 $\pi + 2$ 。 □

9. 甲有 64 枚公正的硬幣，他投擲所有硬幣，任何一個出現反面的硬幣就重擲，第二次還是出現反面的硬幣就擲第三次。求出現正面總數量的期望值？

解答：預計第一次翻到正面的數量是 32，第二次是 16，第三次是 8。全部加總得到 56。 □

10. 已知等差數列前四項為 $x+y, x-y, xy, \frac{x}{y}$ ，請問：第五項為何？

解答：因為公差為 $(x-y) - (x+y) = -2y$ ，所以

$$\begin{cases} xy = (x-y) + (-2y) = x - 3y \\ \frac{x}{y} = (x-y) + 2(-2y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3y}{1-y} \\ x = \frac{-5y^2}{1-y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-y=0 \Rightarrow y=1 \\ -5y^2=3y \Rightarrow y=-\frac{3}{5} \end{cases}$$

當 $y = 1$ 時，第三項為 $xy = x$ 及第四項為 $\frac{x}{y} = x$ 相同，但第一項為 $x + 1$ ，第二項為 $x - 1$ ，所以不合；當 $y = -\frac{3}{5} \Rightarrow x = -\frac{9}{8}$ ，此時第五項為 $(x - y) + 3(-2y) = x - 7y = -\frac{9}{8} - 7 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{123}{40}$ 。□

11. 正八邊形 $ABCDEFGH$ 的面積為 1，請問：矩形 $ABEF$ 的面積為何？



解答：假設 $\overline{AB} = x$ ，則 $\overline{PH} = \frac{x}{\sqrt{2}}$ 。

$ABCDEFGH$ 面積 = 正方形 $PQRS$ 面積 + 4(三角形 APH 面積 + 矩形 $ABQP$ 面積)

$$1 = x^2 + 4 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 + x \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$$

$$1 = 2(1 + \sqrt{2})x^2$$

$$x^2 = \frac{1}{2(1 + \sqrt{2})}$$

所求面積為 $x^2 + 2 \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot x = (1 + \sqrt{2})x^2 = \frac{1}{2}$ 。□

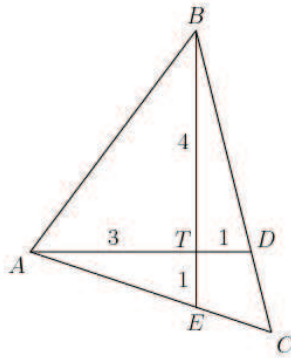
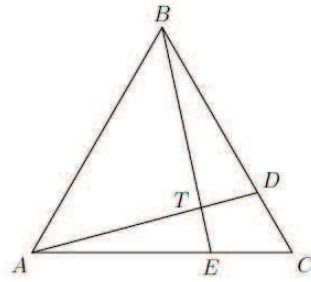
12. 在三角形 ABC 中， $\overline{AB} = 7$ ， $\overline{AC} = 8$ ， $\overline{BC} = 9$ ，且點 D 在三角形 ABC 外接圓上使得 \overline{AD} 為 $\angle BAC$ 的角平分線。請問： $\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}$ 的值為何？

解答：因為 $\angle BAD = \angle CAD$ ，所以 $\overline{BD} = \overline{CD}$ ，利用托勒密定理得到 $7\overline{CD} + 8\overline{BD} = 9\overline{AD} \Rightarrow 15\overline{CD} = 9\overline{AD} \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$ 。□

13. 兩等差數列分別為 1, 4, 7, ... 及 9, 16, 23, ...。假設集合 S 是聯集兩數列前 2004 項，請問： S 中有幾個元素？

解答：數列 A : 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, ...; 數列 B : 9, 16, 23, 30, ...
可以知道兩數列第一個相同的數為 16，且公差為 $[3, 7] = 21$ ，因此共同的數所成的數列 C : 16, 37, 58, ...。已知 $A_{2004} = 3 \cdot 2004 - 2 = 6010$ ， $B_{2004} = 7 \cdot 2004 + 2 = 14030$ ，假設數列 C 的最後一項為 $21k - 5$ ，推得 $21k - 5 \leq 6010 \Rightarrow k = 286$ ，因此數列 C 中有 286 個數。所求為 $2004 + 2004 - 286 = 3722$ 。□

14. 在三角形 ABC 中，點 D, E 分別落在 \overline{BC} ， \overline{AC} 上。假設 \overline{AD} 交 \overline{BE} 於 T 點，使得 $\frac{\overline{AT}}{\overline{DT}} = 3$ ， $\frac{\overline{BT}}{\overline{ET}} = 4$ 。請問： $\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$ 的值為何？



解答：假設 $T(0,0)$, $A(-3,0)$, $B(0,4)$, $D(1,0)$, $E(0,-1)$ ，則 $\overrightarrow{BD} : y = -4x + 4$, $\overrightarrow{AE} : x + 3y = -3$ ，因此交於點 $C\left(\frac{15}{11}, -\frac{16}{11}\right)$ ，所求為 $\frac{CD}{BD} = \frac{\frac{15}{11}-1}{1-0} = \frac{4}{11}$ 。 \square

15. 實數 a, b, c 滿足 $a - 7b + 8c = 4$ 及 $8a + 4b - c = 7$ ，請問： $a^2 - b^2 + c^2$ 的值為何？

解答：

$$\begin{cases} a + 8c = 7b + 4 \\ 8a - c = 7 - 4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 16ac + 64c^2 = 49b^2 + 56b + 16 \\ 64a^2 - 16ac + c^2 = 16b^2 - 56b + 49 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 65a^2 + 65c^2 = 65b^2 + 65$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 + c^2 = 1 \quad \square$$

16. 對於所有的 y ，求 x 滿足 $8xy - 12y + 2x - 3 = 0$ ？

解答：因為 $8xy - 12y + 2x - 3 = 4y(2x - 3) + (2x - 3) = (4y + 1)(2x - 3) = 0$ ，且所有的 y 皆要成立，所以 $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ 。 \square

17. 梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ 且點 E, F 是 $\overline{BC}, \overline{DA}$ 的中點。已知四邊形 $ABEF$ 面積是四邊形 $EFCD$ 面積的兩倍，請問： $\frac{AB}{DC}$ 的值為何？

解答：依題意得到 $\frac{AB+EF}{EF+CD} = 2$, $EF = \frac{AB+CD}{2} \Rightarrow \frac{3AB+CD}{AB+3CD} = 2 \Rightarrow \overline{AB} = 5\overline{CD} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = 5$ 。 \square

18. 請問：有多少個正整數 $n \leq 24$ 使得 $n!$ 是 $1 + 2 + \dots + n$ 的整數倍數？

解答：因為 $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ，所以 $\frac{n!}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2(n-1)!}{n+1}$ 是整數，因此找到不合的有 2, 4, 6, 10, 12, 16, 18, 22，共有 8 個數不合，因此滿足的有 $24 - 8 = 16$ 個。 \square

19. 假設 $4^a = 5$, $5^b = 6$, $6^c = 7$, $7^d = 8$, 請問: $a \cdot b \cdot c \cdot d$ 的值為何?

解答:

$$\begin{aligned}8 &= 7^d \\ &= (6^c)^d \\ &= \left(\left((4^a)^b \right)^c \right)^d \\ &= 4^{2abcd}\end{aligned}$$

$$2^3 = 2^{2abcd} \Rightarrow 3 = 2abcd \Rightarrow abcd = \frac{3}{2}. \quad \square$$

20. 在某次的期中考, 有 10% 的學生拿到 70 分; 有 25% 的學生拿到 80 分; 有 20% 的學生拿到 85 分; 有 15% 的學生拿到 90 分; 其餘學生皆拿到 95 分。請問: 分數的平均與中位數之差為何?

解答: 不失一般性, 假設學生有 20 人, 因此 70 分的有 2 人; 80 分的有 5 人; 85 分的有 4 人; 90 分的有 3 人; 95 分的有 6 人。平均為 $\frac{70(2)+80(5)+85(4)+90(3)+95(6)}{20} = \frac{1720}{20} = 86$, 而中位數為 85, 因此所求為 $|86 - 85| = 1$ 。 \square

~全卷完~