談談
數學競賽試題
的組合學

主講：葉永南

中央研究院數學研究所

2014,0614

約瑟夫問題

這個問題是以弗拉維奧·約瑟夫斯命名的，它是1世紀的 一名猶太歷史學家。他在自己的日記中寫道，他和他的40個戰友被羅馬軍隊包圍在洞中。他們討論是自殺還是被俘，最終決定自殺，並以抽籤的方式決定誰殺掉 誰。約瑟夫斯和另外一個人是最後兩個留下的人。約瑟夫斯說服了那個人，他們將向羅馬軍隊投降，不再自殺。約瑟夫斯把他的存活歸因於運氣或天意，他不知道是 哪一個。

約瑟夫斯問題 維基百科，自由的百科全書

約瑟夫斯問題（有時也稱為約瑟夫斯置換），是一個出現在計算機科學和數學中的問題。在計算機編程的算法中，類似問題又稱為約瑟夫環。

有n個囚犯站成一個圓圈，準備處決。首先從一個人開始，越過$k-2$個人（因為第一個人已經被越過），並殺掉第 k 個人。接着，再越過$k-1$個人，並殺掉第 k 個人。這個過程沿着圓圈一直進行，直到最終只剩下一個人留下，這個人就可以繼續活着。

問題是，給定了n和k，一開始要站在什麼地方才能避免被處決？

設$f(n)$為一開始有n個人時，生還者的位置(注意：最終的生還者只有一個)。走了一圈以後，所有偶數號碼的人被殺。再走第二圈，則新的第二、第四、……個人被殺，等等；就像沒有第一圈一樣。如果一開始有偶數個人，則第二圈時位置為x的人一開始在第$2x-1$個位置。因此位置為$f(2n)$的人開始時的位置為$2f(n)-1$。這便給出了以下的遞推公式：

$$f(2n)=2f(n)-1.$$

如果一開始有奇數個人，則走了一圈以後，最終是號碼為 1 的人被殺。於是同樣地，再走第二圈時，新的第二、第四、……個人被殺，等等。在這種情況下，位置為x的人原先位置為$2x+1$。這便給出了以下的遞推公式：

$$f(2n+1)=2f(n)+1.$$

如果我們把n和$f(n)$的值列成表，我們可以看出一個規律：

n	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
$f(n)$	1 1 3 1 3 5 7 1 3 5 7 9 11 13 15 1

從中可以看出，$f(n)$是一個遞增的奇數數列，每當 n 是 2 的冪時，便重新從$f(n)=1$開始。因此，如果我們選擇 m 和 l，使得$n=2^m+l$且$0\leq l<2^m$，那麼$f(n)=2\cdot l+1$。顯然，表格中的值滿足這個方程。我們用數學歸納法給出一個證明。

定理：如果$n=2^m+l$且$0\leq l<2^m$，則$f(n)=2l+1$。

證明：對n應用數學歸納法。$n=1$的情況顯然成立。我們分別考慮n是偶數和n是奇數的情況。

如果n是偶數，則我們選擇l_1和m_1，使得$n/2=2^{m_1}+l_1$，且$0\leq l_1<2^{m_1}$。注意$l_1=l/2$。我們有$f(n)=2f(n/2)-1=2((2l_1)+1)-1=2l+1$，其中第二個等式從歸納假設推出。

如果n是奇數，則我們選擇l_1和m_1，使得$(n-1)/2=2^{m_1}+l_1$，且$0\leq l_1<2^{m_1}$。注意$l_1=(l-1)/2$。我們有$f(n)=2f((n-1)/2)+1=2((2l_1)+1)+1=2l+1$，其中第二個等式從歸納假設推出。證畢。

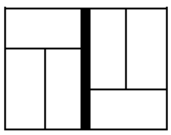
答案的最漂亮的形式，與n的二進制表示有關：把n的第一位移動到最後，便得到$f(n)$。如果n的二進制表示為$n=b_0b_1b_2b_3\dots b_m$，則$f(n)=b_1b_2b_3\dots b_mb_0$。這可以通過把$n$表示為$2^m+l$來證明。

在一般情況下，這個問題的最簡單的解決方法是使用動態規劃。利用這種方法，我們可以得到以下的遞推公式：

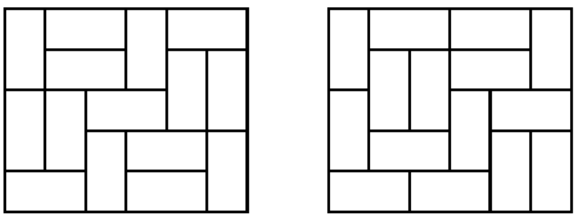
$$f(n,k) = (f(n-1,k)+k) \bmod n \text{ , } f(1,k)=0$$

如果考慮生還者的號碼從$n-1$到n是怎樣變化的，則這個公式是明顯的。這種方法的運行時間是$O(n)$，但對於較小的k和較大的n，有另外一種方法，這種方法也用到了動態規劃，但運行時間為$O(k\log n)$。它是基於把殺掉第k、$2k$、……、2$\lfloor n/k \rfloor$個人視為一個步驟，然後把號碼改變。

用長為 1 寬為 2(不考慮厚度)的磚砌牆。砌出的牆如有貫穿全圖左右或上下的直線出現，稱此為瑕疵線。



5×6 的矩形可用以下兩種方式砌成**沒有**瑕疵線的牆：

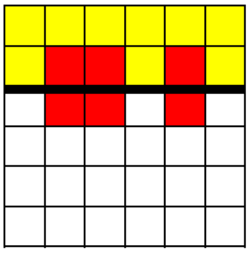


請問 6×6 的矩形是否可以砌成**沒有**瑕疵線的牆？如果可以，請舉出一個例子；如果不能，請證明。

「2009 年青少年數學國際城市邀請賽」選拔初賽 個人計算證明 2

6×6 的正方形有 5 條水平及 5 條鉛直的切割線，假設這些切割線都不是瑕疵線，則它至少要切過一塊磚。(給 5 分)可利用反證法證明非瑕疵的切割線都切過偶數塊磚：

假設有一條水平切割線切過奇數塊磚，考慮圖形上半部塗黃色部份，其面積為奇數單位，不可能被 1×2 的磚鋪滿，矛盾。鉛直切割線亦然。(給 10 分)



6×6 正方形的 10 條切割線至少要切過 2×10 塊磚，但在 6×6 的正方形中只有 18 塊磚。故 6×6 的牆必有瑕疵線。(給 5 分)

桌子上有一堆小石子共1001粒，第一個步驟先從這堆小石子中拿走一粒小石子，並將剩下的小石子任意分成兩堆，以後的每一個步驟，都從數目多於3粒的某堆小石子中拿走一粒，再把該堆小石子任意分成兩堆。試問，能否在經過有限次步驟之後使得桌上的每一堆小石子中都恰好有3粒小石子？並請證明你的結論。

「2007 年青少年數學國際城市邀請賽」選拔複賽 個人計算證明 2

【參考解答】

不可能在若干步驟之後，桌上的每一堆中都剛好有 3 粒小石子。

假設最後在桌上有 n 堆石子，且每堆石子剛好有 3 顆。那麼，在此之前一共進行了 $n-1$ 次操作(開始時只有一堆石子，每操作一次，多分出一堆，所以操作 $n-1$ 次共分成 n 堆)。(給 10 分)

由於每操作一次，都拿走一粒石子，所以一共拿走 $n-1$ 粒石子，因此有

$3n+(n-1)=1001$, (給 5 分)

$4n=1002$，$n=5012/2$，矛盾，(給 5 分)

所以假設桌上每一堆都剛好有 3 粒小石子是錯的。

(只寫「不可能」不給分)

- 能否在下列的□內填入加號或減號，使下式成立？為什麼？
- 1 □ 2 □ 3 □ 4 □ 5 □ 6 □ 7 □ 8 □ 9＝10

- 能否在下列的□內填入加號或減號，使下式成立？有幾種不同的方法？爲什麼？
- 1 □ 2 □ 3 □ 4 □ 5 □ 6 □ 7 □ 8 ＝10

8+5

8+3+2

7+6

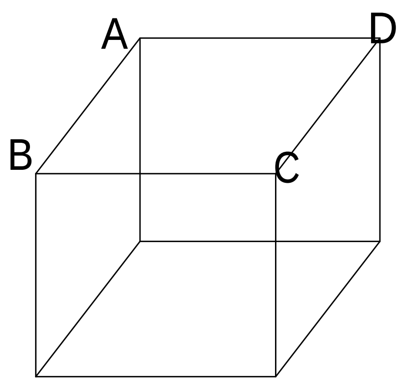
7+4+2

6+5+2

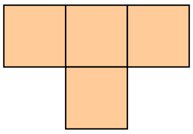
6+4+3

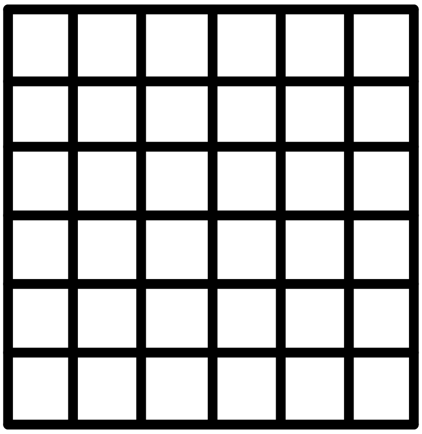
已知一正立方體有八個頂點、六個面及十二條邊。

如果將八個頂點分別用數**1** 或**-1** 來表示；而且每一條邊以它的兩個端點的數之乘積表示，每一面以它的四個頂點的數之乘積表示；例如正方形**ABCD** 爲它的一面，且設頂點**A, B, C, D** 分別以數**1, -1, -1, 1** 表之，則邊**AB**和正方形**ABCD** 分別以數**-1** 及**1** 表示。試問是否有可能使十二條邊和六個面所代表的**18** 個數之和爲**0**？如果你認爲可能，請標示出各個頂點所代表的數；如果不可能，則證明之。

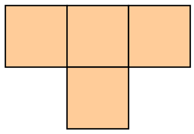


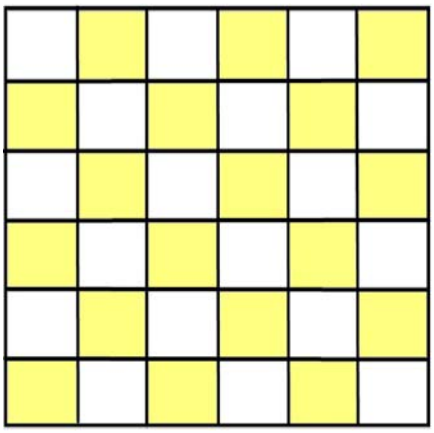
棋盤中，最多可以分別放進T的四方塊多少片？爲什麼？

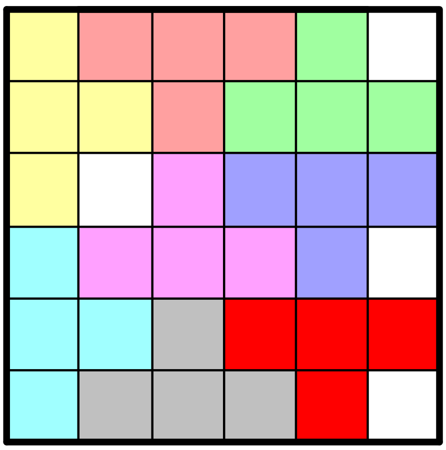




棋盤中，最多可以分別放進T的四方塊多少片？爲什麼？







如何確定鴿與籠

- 有些問題明知道需要運用鴿籠原理去解決，又不知從何下手，這時就需深入分析問題，以洞察問題本質，適當地做些轉化工作，簡潔地選擇‘鴿子’與‘籠子’。

例1：圍棋高手

- 甲棋士一連比賽了11星期，它的戰績輝煌，優勝記錄是：每日至少勝一次；每星期最多勝12次。由此記錄可推得在一段連續的日子裏，甲棋士不多不少勝了21次。

11星期 = 77天　　21次

- 設 $s1, s2, \ldots, s77$ 等為第 1 天，第 2 天，……最後第77天沈高手勝棋的累積數。由於每天至少勝一次及每星期最多勝12次，
- 得　$1 \le s_1 < s_2 < \cdots < s_{77} \le 12 \times 11 = 132$　…(1)

- 得　$1 \le s_1 < s_2 < \cdots < s_{77} \le 12 \times 11 = 132$　…(1)
- 令　$t_i = s_i + 21$　　$i = 1,2,3\ldots77$　… (2)
- …
- 則　$22 \le t_1 < t_2 \cdots < t_{77} \le 132 + 21 = 153$　…(3)

鴿子: $s1, s2, \ldots, s77$ 及 $t1, t2, \ldots, t77$ 共有154個數，

籠子: 但其值落在 1 至153之153個數中。

由鴿籠原理，其中必有二個數其值相同。

- 由(1)及(3)，s_i 之間彼此不相等， t_j之間亦彼此不相等。因此某一 s_k 等於某一 t_m 。$s_k = t_m = s_m + 21$
- 或 $s_k - s_m = 21$。換言之，

從第m+1 天至第 k 天，甲棋士不多不少勝了21次。

- **1994.**(芬蘭)證明存在一個由整數組成的集合 **A** 滿足以下條件： 對於任何由無限個素數組成的集合**S**，存在兩個正整數 **m** 在 **A** 中和 **n** 不在**A**中，且每一個都是某 **k** (**k**≧**2**)個 **S**中互不相同的整數之積。

Problem 6 (proposed by Finland) Show that there exists a set A of positive integers with the following property: For any infinite set S of primes there exist two positive integers m in A and n not in A each of which is a product of k distinct elements of S for some k >= 2.

6. 这是一个存在性问题，依要求可以假定 A 由无平方因子数组成，即 A 中的每个元素都是若干个不同质数的乘积. 注意到，无平方因子数可以依质因子个数分类，A 的构造应从某些类中取出一部分.

设 p_1，p_2，… 是质数从小到大的排列，定义 A_{p_i} 为所有由 p_i 个不同质数的乘积组成的集合，这里的 p_i 个质数中以 p_i 为最小元素.

现在，令 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_{p_i}$，我们证明：$A$ 具有题中的性质.

事实上，对任意由无穷多个质数组成的集合 $S=\{q_1, q_2, \cdots\}$，$q_1<q_2<\cdots$ 则 $q_1\geqslant 2$，$q_2\geqslant 3$，$q_3\geqslant 5$.

设 $q_i=p_{t_i}$，$i=1, 2, \cdots$. 记 $j=p_{t_1}$，考虑数

$$q_1q_2\cdots q_j=p_{t_1}p_{t_2}\cdots p_{t_j}\in A_{p_{t_1}}\subset A.$$

而由于 $q_3-q_1\geqslant 3$，即 $p_{t_3}\geqslant p_{t_1}+3$，令 $l=p_{t_1}+2$，则数

$$q_3q_4\cdots q_l=p_{t_3}p_{t_4}\cdots p_{t_l},$$

上式右边是以 p_{t_3} 为最小元的 p_{t_1} 个数之积，所以 $q_3q_4\cdots q_l\notin A$.

上述讨论表明，令 $k=p_{t_1}$（即 q_1），$m=p_1\cdots p_j$，而 $n=q_3\cdots q_l$（这里 $l=j+2$，$j=k$），则 m，n 都是 S 中 k 个数之积，并且有 $m\in A$，而 $n\notin A$.

1995.6. 設p是一個奇素數，考慮集合{1，2，.....，2p}的滿足以下兩條件的子集A：

A恰有p個元素；

A中所有元素之和可被p整除。

試求所有這樣的子集A的個數。

3. Let p be an odd prime. Find the number of subsets A of $\{1, 2, \dots, 2p\}$ such that

(a) A has exactly p elements, and

(b) the sum of all the elements in A is divisible by p.

Solution

For any p-element subset A of $\{1, 2, ..., 2p\}$, denote by $s(A)$ the sum of the elements of A. Of the $\binom{2p}{p}$ such subsets, $B = \{1, 2, ..., p\}$ and $C = \{p+1, p+2, ..., 2p\}$ satisfy $s(B) = s(C) \equiv 0 \pmod{p}$. For $A \neq B, C$, we have $A \bigcap B \neq \emptyset \neq A \bigcap C$. Partition the $\binom{2p}{p} - 2$ p-element subsets other than B and C into groups of size p as follows. Two subsets A and A' are in the same group if and only if $A' \bigcap C = A \bigcap C$ and $A' \bigcap B$ is a cyclic permutation of $A \bigcap B$ within B. Suppose $A \bigcap B$ has n elements, $0 < n < p$. For some m such that $0 < m < p$,

$$A' \bigcap B = \{x + m : x \in A \bigcap B, x + m \leq p\}$$

$$\bigcup \{x + m - p : x \in A \bigcap B, x \leq p < x + m\}.$$

Hence $s(A') - s(A) \equiv mn \pmod{p}$, but mn is not divisible by p. It follows that exactly one subset A in each group satisfies $s(A) \equiv 0 \pmod{p}$, and the total number of such subsets is $p^{-1}\left(\binom{2p}{p} - 2\right) + 2$.

Alternative Solution

Let ω be a primitive p-th root of unity. Then

$$\prod_{i=1}^{2p}(x - \omega^i) = (x^p - 1)^2 = x^{2p} - 2x^p + 1.$$

Comparing the coefficients of the term x^p, we have

$$2 = \sum \omega^{i_1+i_2+\cdots+i_p} = \sum_{j=0}^{p-1} n_j \omega^j,$$

where the first summation ranges over all subsets $\{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ of $\{1, 2, \dots, 2p\}$ and n_j in the second summation is the number of such subsets such that $i_1 + i_2 + \cdots + i_n \equiv j \pmod{p}$. It follows that ω is a root of $G(x) = (n_0 - 2) + \sum_{j=1}^{p-1} n_j \omega^j$, which is a polynomial of degree $p - 1$. Since the minimal polynomial for ω over the field of rational numbers is $F(x) = \sum_{j=0}^{p-1} \omega^j$, which is also of degree $p - 1$, $G(x)$ must be a scalar multiple of $F(x)$, so that $n_0 - 2 = n_1 = n_2 = \cdots = n_{p-1}$. Since $\sum_{j=0}^{p} n_j = \binom{2p}{p}$, we have $n_0 = p^{-1}\left(\binom{2p}{p} - 2\right) + 2$.

Remark: The first solution is due to the proposer, Marcin Kuczma, the leader of the team from Poland. The second solution is due to Roberto Dvornicich, the leader of the team from Italy. Nikolay Nikolov, a Bulgarian student, won a special prize for his solution which is essentially along the line of the second one. Nikolay had won two Gold Medals and one Silver Medal at the last three IMO's, and topped off his outstanding career as a competitor by obtaining a perfect score this time.

1998.2.在某一次競賽中，共有**a**個參賽者及**b**個裁判，其中**b**≧**3**且爲奇數。設每個裁判對每一位參賽者的判決方式只有通過或不通過。已知任意兩個裁判至多可對**k**個參賽者有相同的判決。證明 **k/a** ≧**(b-1)/2b**。

1998.2.解：對於任一個參賽者，假設有x個評判評他為合格，其他(b-x)個評判評他為不個格。則認同他的評判共有
$x(x-1)/2+(b-x)(b-x-1)/2=x^2-bx+(b^2-b)/2$對。
由於b是奇數，及0≦x≦b，所以最小值是當x=(b-1)/2或者(b+1)/2。經代入後，所以至少有$(b^2-2b+1)/4$對評判認同每位參賽者。
現在總共有b(b-1)/2對評判，及每對評判最多認同k個參賽者，所以 k x b(b-1)/2≧對一對評判來說認同一個參賽者的次數≧$a(b^2-2b+1)/4=(b-1)^2/4$；除去b(b-1)/2a，得k/a≧(b-1)/(2b)。