芝麻開門

財團法人台北市九章數學
教育基金會　孫文先主講

阿里巴巴寶庫的山洞入口有一圓形轉盤，它是開啓山洞門的機關。轉盤的圓周上有 N 個完全相同的桶子，任何相鄰桶子的距離都相等。在每一個桶子內各放置有一隻頭朝上或頭朝下的青魚。阿里巴巴每次的操作都可以選擇任何位置、任何數量的桶子(數量從 1 個到 N 個)將其全部上下翻轉。當每次操作結束，圓盤立即開始轉動，如果所有桶內的青魚頭全部朝上或全部朝下，則山洞門就會打開。否則當圓盤停止轉動後，任何人都無法再辨認哪些桶子曾被翻轉過。無論這些青魚如何擺置，若阿里巴巴必有數學策略保證可以打開山洞門，請問所有可能的 N 值是什麼？

這是環球城市數學競賽 2009 秋季賽高中組高級卷的試題，此問題源自於 Martin Gardner 1979 年在 Scientific American Magazine 的文章(後來結集在 Fractal Music, Hypercards and More… 一書中)，原問題爲：

有一個四角方桌，它以其中心為軸可以旋轉。桌子的每個角落都有一個深孔，每個孔底都放置有一個酒瓶，酒瓶可能朝上也可能朝下放置。您無法看到深孔內的情況，但您可以用手伸入深孔內並觸摸得知酒瓶朝上或朝下。

「一次操作」的定義如下：旋轉桌子，等它停止後，將雙手伸入不同位置的深孔內。您可以隨時選擇調整酒瓶的朝向，亦即您可以不翻轉、擇一翻轉或兩個酒瓶都翻轉。接著再度旋轉桌子，重複以上的操作，進行第二次的操作。

當桌子旋轉停止後，任何人都無法再辨別哪些深孔內的酒瓶曾被觸摸過。因此，接下來您只有二種選擇：您可以選擇觸摸任一條對角線上的兩個酒瓶或選擇任意相鄰的兩個酒瓶。您的目標是設法使四個酒瓶的朝向全都一致，全朝上或全朝下。當目標達成時，鈴聲會響起表示操作成功。

初始時，四個深孔內的酒瓶都是隨機朝上或朝下放置。若一開始這些瓶子的朝向都一致，鈴聲立即響起，您不須任何動作即完成目的。因此，我們假設初始狀態時，這些瓶子的朝向不完全一致。

是否存在一個程序，保證在有限次操作內可以使鈴聲響起？經過粗略的考慮此問題後，許多人的結論是不存在這樣的程序。他們的理由是認為這是一個機率的問題，萬一運氣不好，您會一直重複一些無法明確有效的步驟。事實並非如此，經過不超過 n 次正確的操作，的確有辦法使鈴聲響起。請問 n 的最小值是什麼？請問在 n 次或更少次操作保證可以使鈴聲響起的操作程序是什麼？

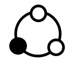
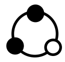
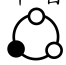
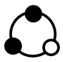
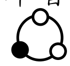
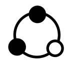
我們先簡化這個問題，假設桌子只有二個角落，則只有二個深孔。在此情況，顯然只須要一次操作即可使鈴聲響起。如果桌子有三個深孔(在三角形桌子的三個角落)，只須要以下的二次操作即可完成：

1. 觸摸任意一對深孔。若所觸及的兩個瓶子朝向都相同，則將它們全部翻轉，此時鈴聲必會響起。若所觸及的兩個瓶子朝向不同，則將朝下的瓶子翻轉為朝上，另一瓶子不動。若此時鈴聲仍未響起，則繼續下一次操作。
2. 旋轉桌子，然後觸摸任一對深孔。若所觸及的兩個瓶子都朝上，則將它們

全部翻轉，此時鈴聲必會響起；若所觸及的兩個瓶子朝向不同，則將朝下的瓶子翻轉為朝上，另一瓶子不動，則鈴聲必會響起。

環球城市數學競賽的問題與 Martin Gardner 的問題乍看之下非常相似，事實上有非常大之差異。

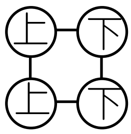
當桌子有三個深孔時，Martin Gardner 的操作規則下只須要 2 次即可保證鈴聲響起。但是依照環球城市數學競賽問題的規則，他只能選擇 1、2 或 3 個瓶子全部上下翻轉，不似 Martin Gardner 的規則，可以先探查瓶子的朝向或再決定翻哪幾個瓶子。因此在此規則之下，三個深孔時無論操作多少次永遠無法保證讓鈴聲響起。例如：

(a) 每次選擇 1 個瓶子上下翻轉時，則遇到  或  時，每次都翻到二個朝向相同之一的瓶子時，則永遠無法讓鈴聲響起。
(b) 每次選擇 2 個瓶子上下翻轉時，則遇到  或  時，每次都翻到一上一下朝向相反的瓶子時，則永遠無法讓鈴聲響起。
(c) 每次選擇 3 個瓶子上下翻轉時，則遇到  或  時，因原來朝向不全相同，全部翻轉後也不全相同，故永遠無法讓鈴聲響起。

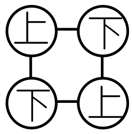
由此例子就可以明顯察覺這兩個問題之差異。

現在我們來考慮桌子有四個深孔的情況。此時只須要進行以下五次操作就可以使有四個深孔內的瓶子全部朝上或朝下。

A. 觸摸任何一條對角線上的兩個深孔，若此二瓶子不全朝上，則將它們翻轉為全部朝上。若鈴聲未響則繼續進行下一步驟。
B. 旋轉桌子，觸摸任何一對相鄰的深孔。若此二瓶子全朝上，則不動它們；若此二瓶子有朝下者，則將它們全翻轉為朝上。此時若鈴聲仍未響起，則我們可確知有三個瓶子朝上、有一個瓶子朝下。
C. 旋轉桌子，觸摸任何一條對角線上的兩個深孔，若有一個瓶子朝下，則將它翻轉為朝上，此時鈴聲必然響起；若兩個瓶子全朝上，則將其中一個瓶子翻轉為朝下，此時瓶子的朝向必為以下形式：



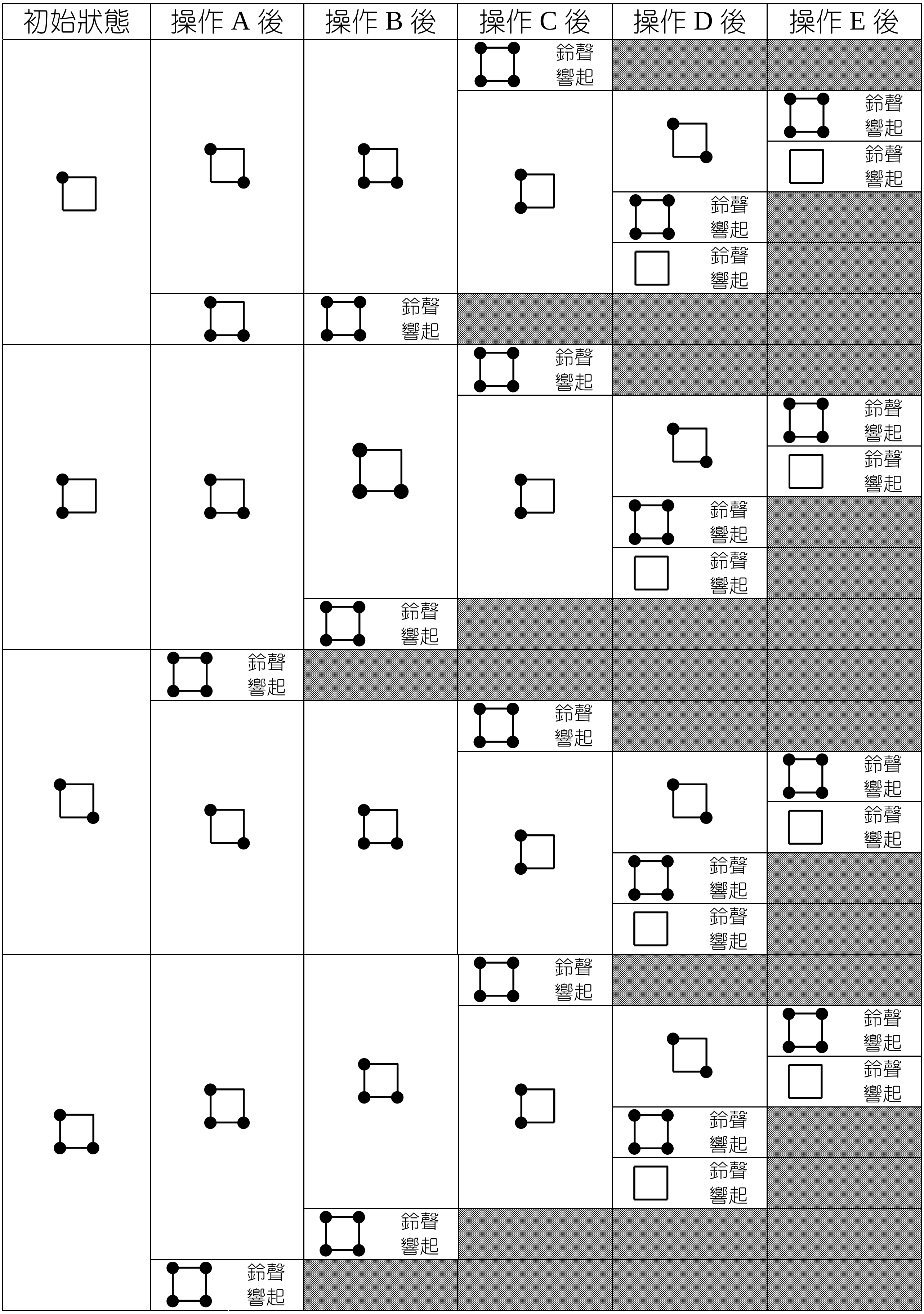
D. 旋轉桌子，觸摸任何一對相鄰的深孔，將這兩個瓶子全部翻轉。若所翻的瓶子原來的朝向相同，則鈴聲必響起，否則此時瓶子的朝向必為以下形式：



E. 旋轉桌子，觸摸任何一條對角線上的兩個深孔，將這兩個瓶子的朝向全部改變方向，則鈴聲必然響起。

可將各種情況經過以上操作後整理成下表：

●代表瓶子朝上



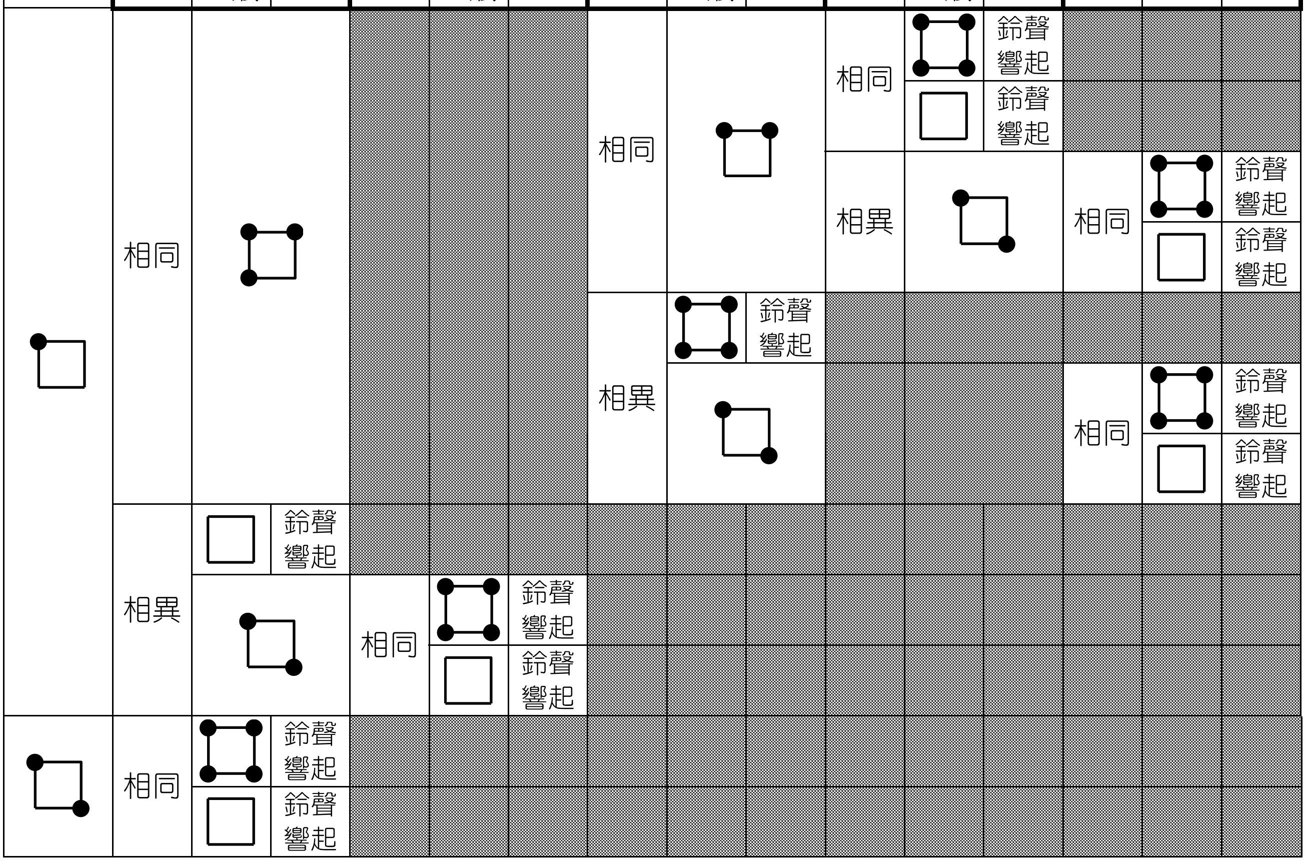
Albert G. Stanger 1987 年在 Journal of Recreational Mathematics 發表了一篇“Variations on the Rotating Table Problem”的文章，文中討論兩種由機器人操作的變形問題。

1. 由您來指示機器人探查哪二個深孔。機器人探查後向您回報二個瓶子的朝向“相同”或“相異”，然後您再指示機器人翻轉二個瓶子、不翻轉或由機器人任意翻轉其中一個。
2. 操作方法同上，但機器人可能在任何時刻說一次謊(或者說感應失誤)。

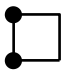
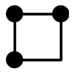
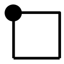
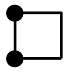
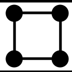
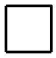
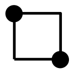
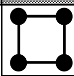
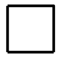
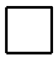
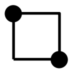
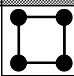
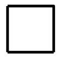
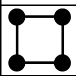
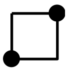
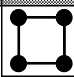
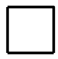
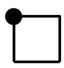
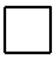
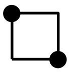
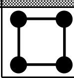
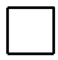
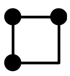
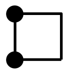
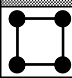
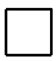
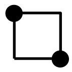
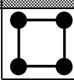
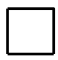
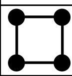
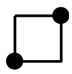
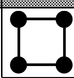
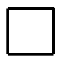
在文中，Stanger 證明了上述這二種變形問題都可以在有限次操作內使得鈴聲響起。對於第一種變形問題，他給出了一個五次操作的解答；對於第二種變形問題，他給出了一個須要七次操作的解答。令人驚訝的是，第二種操作策略根本不在乎機器人說什麼，所以對於機器人恆說真話，或恆說假話，或有時說真話有時說假話都能成功的使鈴聲響起。將各種情況的操作整理成下表：

第一種變形問題：

初始狀態	步驟 1：探查任何一條對角線的兩個深孔			步驟 2：探查任何一條對角線的兩個深孔			步驟 3：探查任何一條對角線的兩個深孔			步驟 4：探查任何一條相鄰的兩個深孔			步驟 5：探查任何一條對角線的兩個深孔		
	機器人的回報	您的指令	下一步驟	機器人的回報	您的指令	下一步驟	機器人的回報	您的指令	下一步驟	機器人的回報	您的指令	下一步驟	機器人的回報	您的指令	下一步驟
	相同	翻轉二瓶	3	相同	翻轉二瓶	3	相同	翻轉一瓶	4	相同	翻轉二瓶		相同	翻轉二瓶	
	相異	翻轉一瓶	2	相異	翻轉一瓶	5	相異	翻轉一瓶	5	相異	翻轉二瓶	5			

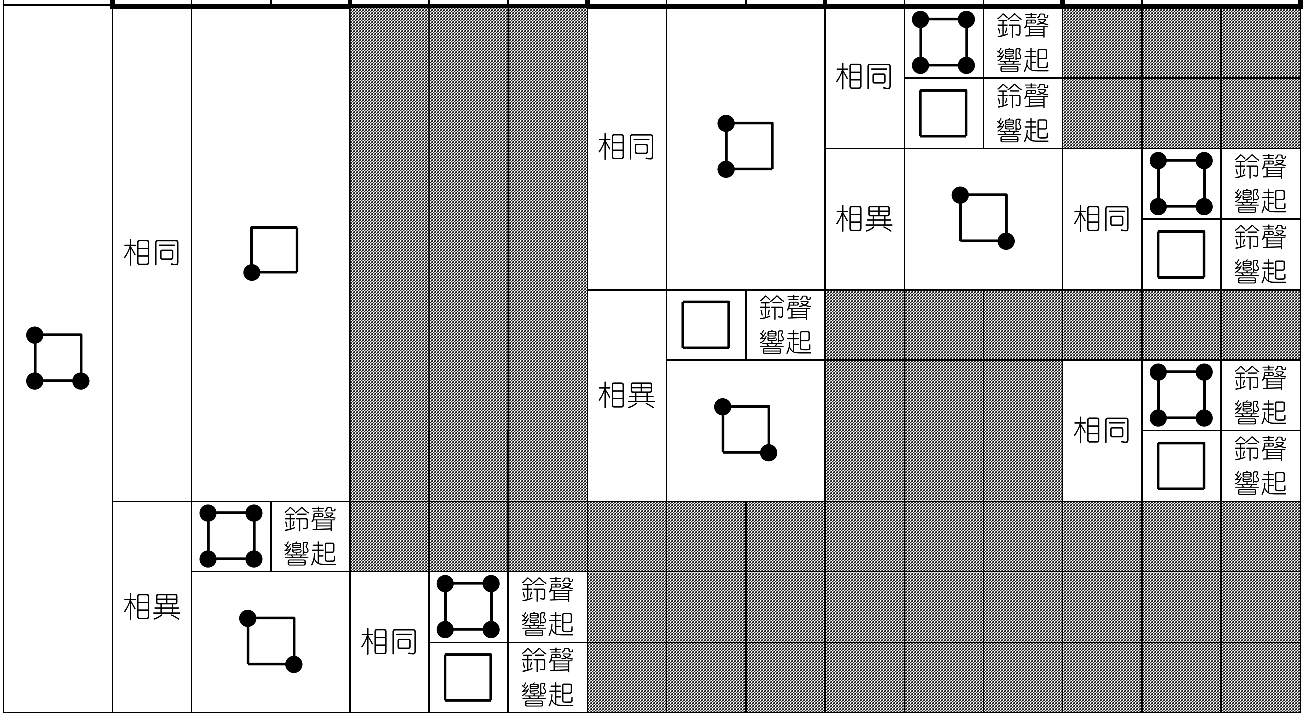


第一種變形問題：

<table>
<tr><td rowspan="4">初始狀態</td><td colspan="3">步驟 1：
探查任何一條對角線的兩個深孔</td><td colspan="3">步驟 2：
探查任何一條對角線的兩個深孔</td><td colspan="3">步驟 3：
探查任何一條對角線的兩個深孔</td><td colspan="3">步驟 4：
探查任何一條相鄰的兩個深孔</td><td colspan="3">步驟 5：
探查任何一條對角線的兩個深孔</td></tr>
<tr><td>機器人的回報</td><td>您的指令</td><td>下一步驟</td><td>機器人的回報</td><td>您的指令</td><td>下一步驟</td><td>機器人的回報</td><td>您的指令</td><td>下一步驟</td><td>機器人的回報</td><td>您的指令</td><td>下一步驟</td><td>機器人的回報</td><td colspan="2">您的指令</td></tr>
<tr><td>相同</td><td>翻轉二瓶</td><td>3</td><td>相同</td><td>翻轉二瓶</td><td>3</td><td>相同</td><td>翻轉一瓶</td><td>4</td><td>相同</td><td>翻轉二瓶</td><td></td><td rowspan="2">相同</td><td colspan="2" rowspan="2">翻轉二瓶</td></tr>
<tr><td>相異</td><td>翻轉一瓶</td><td>2</td><td>相異</td><td>翻轉一瓶</td><td>5</td><td>相異</td><td>翻轉一瓶</td><td>5</td><td>相異</td><td>翻轉二瓶</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="20"></td><td rowspan="20">相異</td><td colspan="2" rowspan="10"></td><td rowspan="7">相同</td><td colspan="2" rowspan="7"></td><td rowspan="4">相同</td><td colspan="2" rowspan="4"></td><td rowspan="2">相同</td><td></td><td>鈴聲響起</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>鈴聲響起</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">相異</td><td colspan="2" rowspan="2"></td><td rowspan="2">相同</td><td></td><td>鈴聲響起</td></tr>
<tr><td></td><td>鈴聲響起</td></tr>
<tr><td rowspan="3">相異</td><td></td><td>鈴聲響起</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">相同</td><td></td><td>鈴聲響起</td></tr>
<tr><td></td><td>鈴聲響起</td></tr>
<tr><td rowspan="3">相異</td><td></td><td>鈴聲響起</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">相同</td><td></td><td>鈴聲響起</td></tr>
<tr><td></td><td>鈴聲響起</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="10"></td><td rowspan="3">相異</td><td></td><td>鈴聲響起</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">相同</td><td></td><td>鈴聲響起</td></tr>
<tr><td></td><td>鈴聲響起</td></tr>
<tr><td rowspan="7">相同</td><td colspan="2" rowspan="7"></td><td rowspan="4">相同</td><td colspan="2" rowspan="4"></td><td rowspan="2">相同</td><td></td><td>鈴聲響起</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>鈴聲響起</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">相異</td><td colspan="2" rowspan="2"></td><td rowspan="2">相同</td><td></td><td>鈴聲響起</td></tr>
<tr><td></td><td>鈴聲響起</td></tr>
<tr><td rowspan="3">相異</td><td></td><td>鈴聲響起</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">相同</td><td></td><td>鈴聲響起</td></tr>
<tr><td></td><td>鈴聲響起</td></tr>
</table>

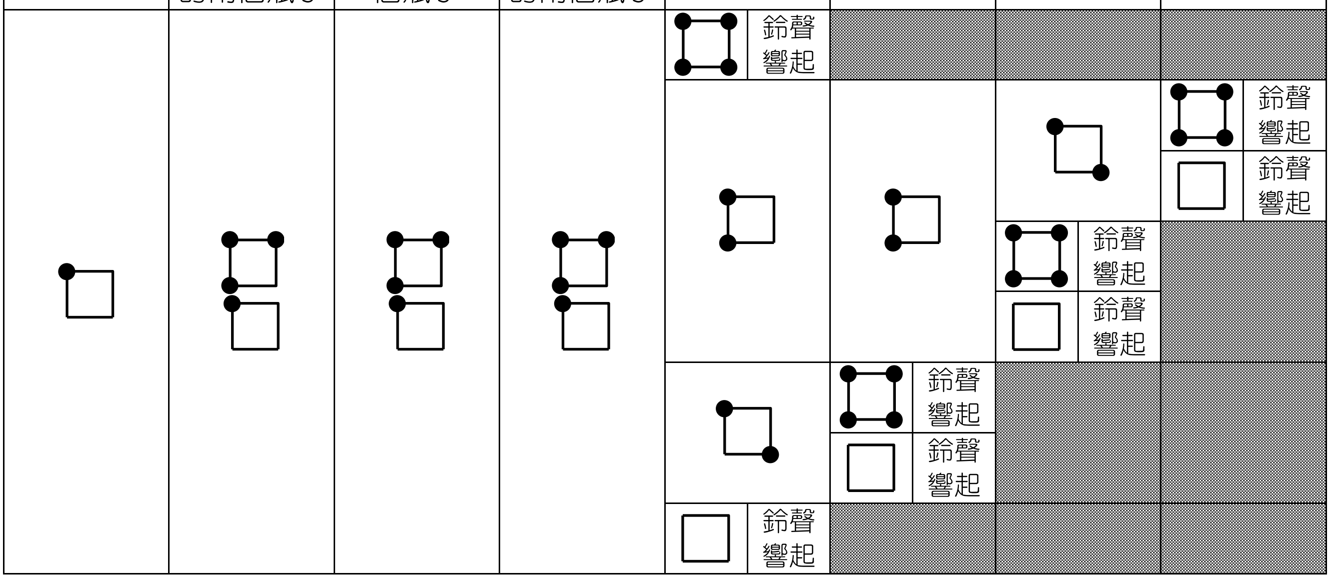
第一種變形問題：

初始狀態	步驟 1：探查任何一條對角線的兩個深孔			步驟 2：探查任何一條對角線的兩個深孔			步驟 3：探查任何一條對角線的兩個深孔			步驟 4：探查任何一條相鄰的兩個深孔			步驟 5：探查任何一條對角線的兩個深孔	
	機器人的回報	您的指令	下一步驟	機器人的回報	您的指令	下一步驟	機器人的回報	您的指令	下一步驟	機器人的回報	您的指令	下一步驟	機器人的回報	您的指令
	相同	翻轉二瓶	3	相同	翻轉二瓶	3	相同	翻轉一瓶	4	相同	翻轉二瓶		相同	翻轉二瓶
	相異	翻轉一瓶	2	相異	翻轉一瓶	5	相異	翻轉一瓶	5	相異	翻轉二瓶	5		

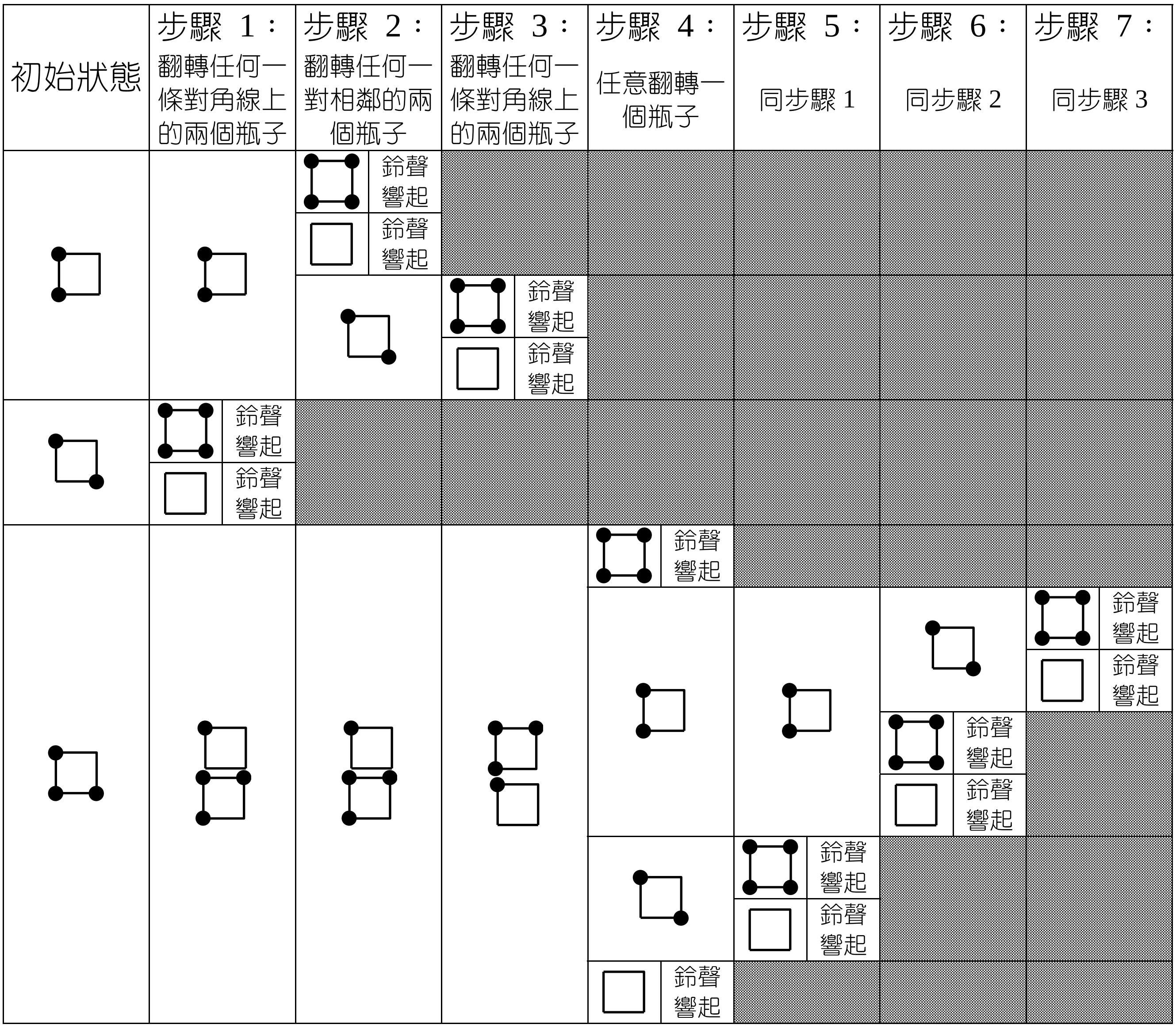


第二種變形問題：

初始狀態	步驟 1：翻轉任何一條對角線上的兩個瓶子	步驟 2：翻轉任何一對相鄰的兩個瓶子	步驟 3：翻轉任何一條對角線上的兩個瓶子	步驟 4：任意翻轉一個瓶子	步驟 5：同步驟 1	步驟 6：同步驟 2	步驟 7：同步驟 3



第二種變形問題：



令人驚訝地，您不須要關注什麼事，這七個步驟亦可解決原問題。在 1979 年 Miner S. Keeler 就曾經提出用此解法來解決 Martin 的原題。他的作法為：

(1) 翻轉任意一條對角線上的兩個瓶子；
(2) 翻轉任意相鄰的兩個瓶子；
(3) 翻轉任意一條對角線上的兩個瓶子；
(4) 翻轉任意一個瓶子；
(5) 翻轉任意一條對角線上的兩個瓶子；
(6) 翻轉任意相鄰的兩個瓶子；
(7) 翻轉任意一條對角線上的兩個瓶子；

我們可以由上述之策略驗證這個解法的正確性。

第一種變形問題與原問題在操作上略有不同，原問題遇到兩個瓶子不同時我們可以準確的指定翻轉哪一個瓶子，而變形問題的操作則是由機器人隨意地選擇其中一個瓶子翻轉。

「旋轉桌面(Rotating Table)」的問題可以做以下之推廣：桌面為一個正 n 邊形，桌面的 n 個頂點都有各有一個深孔，每個孔底都放置有一個酒瓶，酒瓶可

能朝上也可能朝下放置。玩家有 k 隻手，每次可以伸入 k 個不同的深孔內並觸摸深孔內瓶子的朝向。對於每一個 n 及 k，我們將探究是否有策略在有限次的操作後保證能使鈴聲響起？

史丹佛大學 William T. Laaser 與 Lyle Ramshaw 合寫了一篇論文，宣稱：這樣的操作策略存在的充分必要條件為 n 與 k 滿足不等式 $k \ge (1-\frac{1}{p})n$，其中 p 是 n 的因數中最大的質數。

有幾個有關操作的小細節必須先加以釐清，以便玩家能依規定進行操作。

第一條：玩家必須在實際觸摸到瓶子前先明確指出他要探查哪些深孔。

第二條：當玩家探索某些深孔並翻轉某些瓶子後，鈴聲並不會立即響起，除非玩家的所有手離開深孔後才會顯示鈴聲響或是不響。此意即不允許玩家翻轉其中某幾個瓶子後試探鈴聲是否響起，再決定其他幾隻手的下一步動作。

我們定義 $f(n)$ (其中 $n \ge 2$)為最小的正整數 k 值，使得對於 n 邊形桌子、瓶子的朝向有兩種的情況下玩家用 k 隻手保證有策略可以在有限次操作後鈴聲會響起。我們的研究目的便是要確定函數 $f(n)$ 之值。

「旋轉桌面」問題的操作規則非常微妙很難明確地把它規定完整。之前我們已經陳述了幾個小細節，所以我們理應將問題陳述地更規範些，也必須更精確些。我們把此問題改述為兩人對奕的遊戲問題，問題涉及玩家與桌子相互操作圓周上的點。

本文所述之正多邊形，以它的中心可以自由旋轉，但不可以上下兩面翻轉。了解這一點後，我們可以將一個正 n 邊形的頂點用長度為 n 的鍊環來標記它。

一條長度為 n 的鍊環是一條長度為 n 的細繩，將此繩沿著圓周旋轉視為相同的鍊環。要描述出一條實際的鍊環，我們可劃一個圓形或在方括號內填入一串數，其中的數串從此鍊環的任一點開始以順時針方向依序寫下鍊環上的標記。例如，圖 1 中的長度為 6 的鍊環可記為<010011>、<100110>、<001101>、<011010>、<110100>或<101001>，但不可記為<101100>。

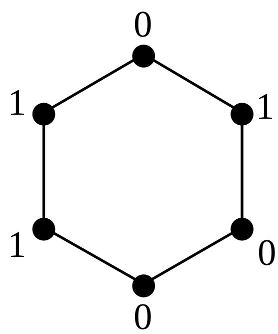


圖 1

我們以 U 代表瓶子朝上、以 D 代表瓶子朝下。在任何一個時間點瓶子的現狀對應於一條長度為 n 的鍊環，它的每個頂點名稱為 U 或 D。本遊戲規定由桌子先手，實際上是由桌子先決定瓶子{U, D}的初始狀態，稱之為狀態 S_1。

接著由玩家進行第一次操作。他首先宣布他要探查圓周上哪些位置上的深孔，我們將這些探索深孔的排列形式稱為「探查佈局」。正規地說，一個探查佈局是用字母{H, G}來表示一條鍊環，其中 H 代表手，即玩家要探查的位置，而 G 代表空隙，即玩家不探查的位置。由於玩家只有 k 隻手，因此探查佈局不能有超過 k 個 H 記號。我們將第一次的探查佈局稱做 P_1。

接下來繼續由桌子操作。桌子可以根據 S_1 、 P_1 的情形，從 n 個可能旋轉出的位置中挑選一個情況，然後旋轉桌子。當桌子轉完後，玩家將會得知探查佈

局 P_1 每個 H 位置上對應狀態 S_1 的瓶子朝上或朝下。玩家此時可以自行決定要將任何一個探查位置上的瓶子上下翻轉或不翻轉。經過以上這些操作後，桌子的狀態變成以字母{U, D}表示的鍊環，稱之為狀態 S_2。如果一條鍊環上所有瓶子的朝向全都是 U 或全都是 D，則我們稱這條鍊環的狀態為「單調的」鍊環。

此時，這個遊戲的操作可表示成一個迴圈，假設剛剛出現一個非單調的狀態 S_i，玩家決定一個探查佈局 P_i；桌子選定讓 S_i 與 P_i 如何對應；玩家被告知狀態 S_i 中探查佈局 P_i 的 H 內瓶子的朝向；玩家接著考慮如何變動這些被探查瓶子的朝向，改變為狀態 S_{i+1}。若 S_{i+1} 是單調的，則鈴聲響起，視為玩家經 i 次操作後獲勝。桌子的目標是設法阻止玩家獲勝。若能使此遊戲永遠無法終止，則視為桌子獲勝。之前我們曾定義 $f(n)$ 為玩家用 k 隻手保證會贏的最小正整數 k，此即當 $k \geq f(n)$ 時，玩家有必勝的策略；當 $k < f(n)$，桌子有必勝的策略。

當 1979 年三月 Martine Gardner 在專欄上刊登出此問題後，Ronald L. Graham 與 Persi Diaconis 即指出若 n 為質數，則 $f(n) = n-1$；若 n 為合數，則 $f(n) \leq n-2$。Scott Kim 證明：對於所有 $a \geq 1$、$b \geq 2$，則 $f(ab) \geq a\left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil$，其中 $\lceil x \rceil$ 表示大於 x 的最小整數。James Boyce 首先猜想 $f(n)$ 的公式為 $f(n) = (1-\frac{1}{p})n$，其中正整數 $n \geq 2$、p 為 n 的最大質因數。由此可知，除 n=2 之外，所有的 $f(n)$ 值都是偶數。

【定理 1】對於任意的正整數 $n \geq 2$，將使得在「旋轉桌面」遊戲中玩家保證能贏的最少手數記做 $f(n)$，且令 p 為 n 的最大質因數，則 $f(n) = (1-\frac{1}{p})n$。

要證明定理 1 的正確性，我們必須分上界與下界兩個方向來證明。要證明 $f(n)$ 值的下界，即要證明下述之引理：

【引理 1】令正整數 $n \geq 2$，p 為 n 的最大質因數。若玩家被限制只能用少於 $(1-\frac{1}{p})n$ 隻手，則桌子有必勝之策略。

【證明】

若 n 可以被因數分解為 n=lm，則我們可以將正 n 邊形視為 l 個互相交疊的正 m 邊形。例如，$6 = 2 \times 3$，可將正六邊形視為兩個交錯的正三角形，如圖 2 所示。

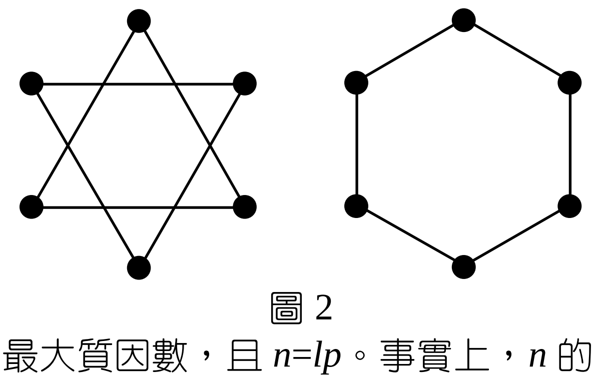


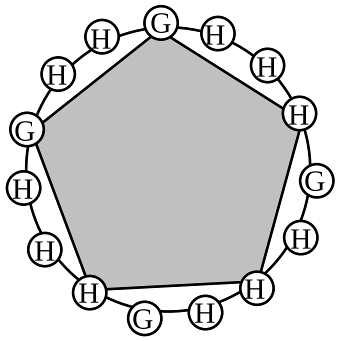
圖 2

令 p 為正整數 $n \geq 2$ 的最大質因數，且 n=lp。事實上，n 的任意質因數 p 都可符合此論證，但取最大的質因數可得到較強的結果。由前段所述，「旋轉桌面」遊

戲的狀態與探查佈局都可視為 l 個互相交疊的正 p 邊形之組合。假設玩家只能用少於 $(1-\frac{1}{p})n$ 隻手，我們的目標是設法構造一個桌子必勝的策略。能保證達成的基本構想是：對於所有的 i、對於狀態 S_i ，至少存在有一個 p 邊形不是單調的，即它同時包含有朝上與朝下的瓶子。因為我們可以任選桌子的狀態 S_1 ，所以一開始我們很容易建立這樣的狀況。但是我們必須證明遊戲進行中，桌子恆能保持這樣的狀態。假設狀態 S_i 中包含有非單調的 p 邊形，選擇其一，稱為 S_i^*。令 P_i 代表玩家在第 i 次操作時所決定的探索佈局。因為玩家已經被限制於只能用少於 $(1-\frac{1}{p})n = l(p-1)$ 隻手，故 P_i 的 l 個正 p 邊形中至少有一個 p 邊形包含有二個空隙 G。任選一個這樣的 p 邊形，稱之為 P_i^* 。如果我們把正 p 邊形中相鄰二頂點的距離當作 1 單位，則我們可以選擇二個在 P_i^* 中距離為 j 的空隙。現在考慮在 S_i^* 中每次間隔 i 個頂點的路徑。因為 p 是質數，則無論 j 值為何，這樣的路徑將經過 S_i^* 中的每一個頂點。因為 S_i^* 為非單調的，故在這個路徑中，顯然必經過有 U 與 D 的點。所以也必定有某個 D 後接續為 U。此即推出 S_i^* 中存在有一個 U 和一個 D 距離為 j。

現在我們可以告訴桌子如何進行操作。轉動鍊環 S_i 與 P_i 使得 p 邊形 S_i^* 與 P_i^* 隨之變動，並使得在 S_i^* 中的 U 和 D 距離為 j、對應於 P_i^* 的中二個距離為 j 的 G。因為玩家無法變動所有手間隙上瓶子的朝向，因此使得狀態 S_{i+1} 將至少包含有一個非單調的 p 邊形。重複地利用此技巧，對於所有的 i，桌子將保持使得狀態 S_i 恆存有一個非單調的 p 邊形。這提供了桌子一個必勝的策略。

例如，若 n=15、k=11 $< (1-\frac{1}{5})\times 15 = 12$，令 S_1 與 P_1 為如圖所示，則無論 11 隻手如何佈局，必能使二個沒有探索的二個空隙位置上的瓶子一上一下，永遠無法使所有瓶子的朝向全部相同，故桌子必勝。



引理 1 中下界的結果只是簡單的部分，要完整證明定理 1，我們還有更艱辛的工作要做，即玩家如何用最少數量的手構造一個必勝的策略。我們先從之前討論的較少邊形桌子的策略開始，運用其原理來構造較多邊形桌子的策略。

假設桌子為正 n 邊形，並因數分解為 n=lm，我們可將此 n 邊形視為 l 個互相交疊的相異 m 邊形。假設有些長度為 n 的鍊環 T 其組成的 m 邊形每個都是單調的，我們可注意到這樣的鍊環 T 必須包括 m 條長度為 l 且首尾相接的線串，此即，T 具有 $<X^m>$ 的型式，其中 X 為某些線串。我們將這樣的鍊環稱做完全 m 次鍊環以示區別。例如，一個偶長度的鍊環若其每條直徑兩端上的標記相同，則此鍊環具有<XX>的型式，我們稱之為完全二次鍊環。一個長度為 n 的完全 n 次鍊環即此鍊環是單調的。

對於 $n=lm$ 的 n 邊形桌子，假設我們有策略使得目前的狀態成為完全 m 次鍊環，則此時我們利用至少 $mf(l)$ 隻手就能有簡單的策略。它的構想是仿效 l 邊形桌子玩家的最佳策略，重複複製 m 次，可稱將此策略複製若干次。先用在較小情況第一次的探查佈局，複製 m 次後而建立成較大情況的探查佈局。因為目前狀態 S 是一個完全 m 次鍊環，玩家的 m 組每個 $f(l)$ 隻手都探查到相同序列的瓶子朝上或朝下。接著我們只要構造玩家如何運用每一組內的手調整較小邊數桌面的狀態。無論如何調整，較大邊數桌子的狀態仍舊保持是個完全 m 次鍊環，因此我們就可以繼續仿效較小桌子的策略。以上的論證證明了引理 2 的真實性：

【引理 2】*假設「旋轉桌面」遊戲的桌子為 n 邊形，目前桌子的狀態 S 為完全 m 次，其中正整數 $m \ge 2$ 可整除 n。則存在一個玩家現在開始只用 $m \times f(\frac{n}{m})$ 隻手就可以使鈴聲響起的必勝策略。*

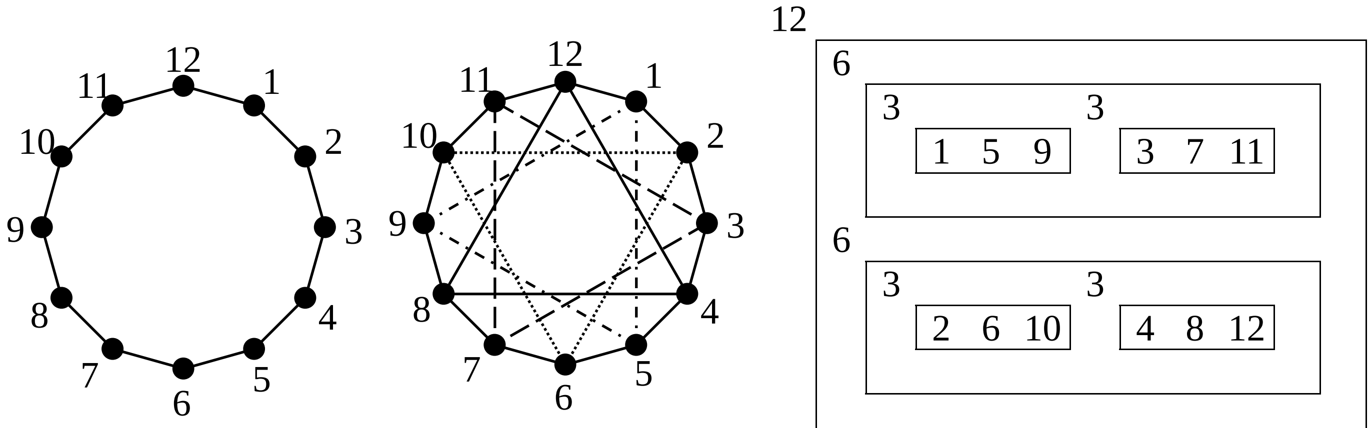
在運用引理 2 之前，我們必須先使桌子的狀態變成完全次數的鍊環。下一個引理宣稱不須用太多隻手就可以有策略完成這部分的工作：

【引理 3】*若 p 為正整數 $n \ge 2$ 的最大質因數，則「旋轉桌面」遊戲桌子為 n 邊形時存在一個玩家必勝的策略，並且有以下性質：他只須使用至多 $(1-\frac{1}{p})n$ 隻手，在有限多次操作下必能使鈴聲響起或迫使桌子變成某種完全 p 次鍊環。*

在證明引理 3 之前，我們先用個實例來感受一下。以 n=12 的情況來討論，12 的最大質因數為 3，因此根據引理 3，對於 12 邊形的桌子，我們有以下的宣稱：對於 12 邊形的桌子，玩家只須使用 8 隻手就存在有一個使鈴聲響起或迫使桌子變成某種完全 3 次的狀態。

當 n=12，桌子是正十二邊形，為了解即將構造的策略，我們必須將正十二邊形視為由兩個相互交疊的正六邊形所構成的，而每個正六邊形也將被視為由兩個相互交疊的正三角形所構成的。圖 3(a)表示這個將頂點依序編號的正十二邊形，恰似一個鐘面，換個敘述方法，圖 3(a)個鐘形鍊環的圖可表述為

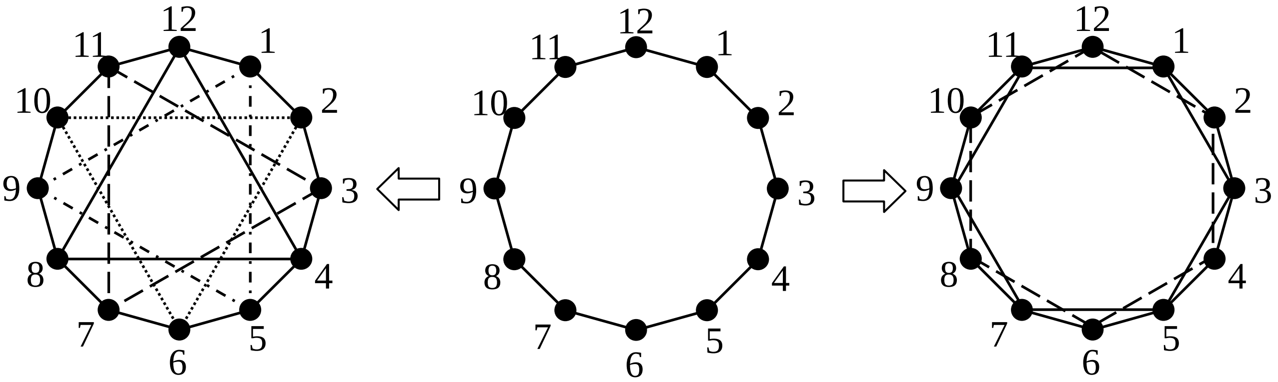
$$C=\langle(1)\ (2)\ (3)\ (4)\ (5)\ (6)\ (7)\ (8)\ (9)\ (10)\ (11)\ (12)\rangle$$



(a) (b)

圖 3

在圖 3(b)中，鐘面鍊環 C 被重繪成由互相交疊的正六邊形與正三角形所組成的。在圖 3(b)中每個矩形表示由鐘面頂點所構成的子多邊形。每個矩形的左上角標記正多邊形的邊數，我們稱這樣的圖為結構圖。我們可以把任何長度為 12 的鍊環作類似的結構圖，藉此我們可明確描述狀態、探索佈局並構造必勝策略。



我們的策略將用到三種不同的探索佈局，稱之為 P_1、P_2 與 P_3。圖 4.1、4.2、4.3 了描述這些探查佈局的結構圖。P_1 利用 6 隻手探查前述的一個正六邊形；P_2 利用 6 隻手探查這兩個正六邊形中的各一個三角形；P_3 利用 8 隻手探查這四個正三邊形中的各二個頂點。這些探查的佈局與桌子如何轉動無關，我們無法確知 P_1 將探查哪一個正六邊形，但確知將探查兩個正六邊形之一，對於 P_2 與 P_3 也是類似的狀況。這是在桌子旋轉下的不變情況，使得我們的結構圖非常好用。

P_1

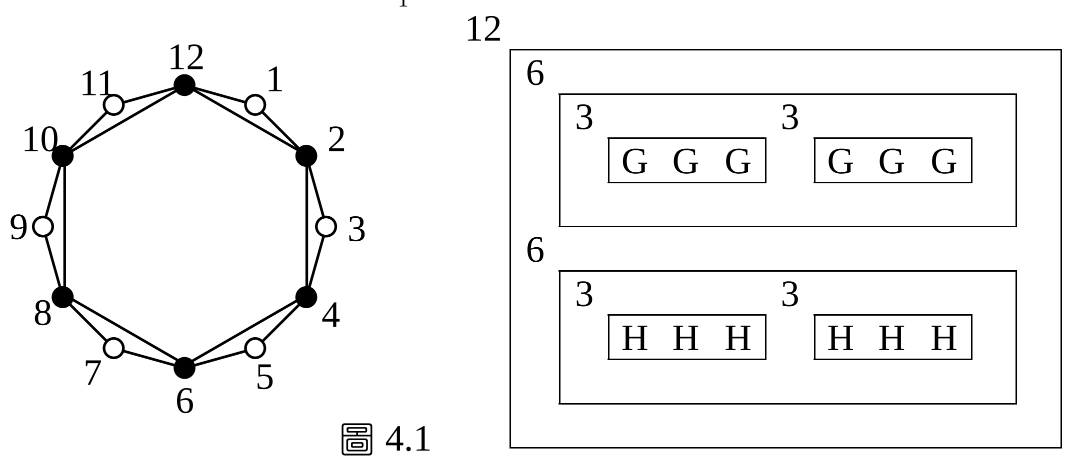


圖 4.1

P_2

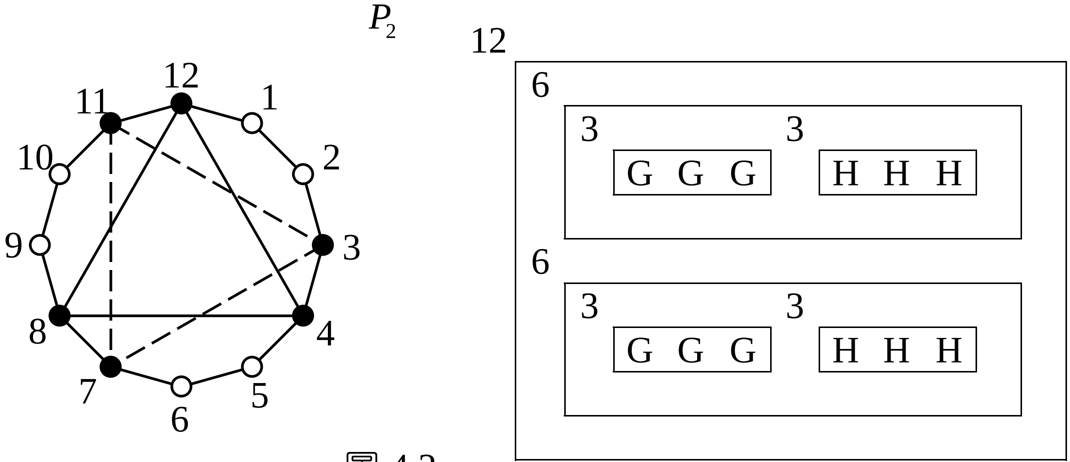
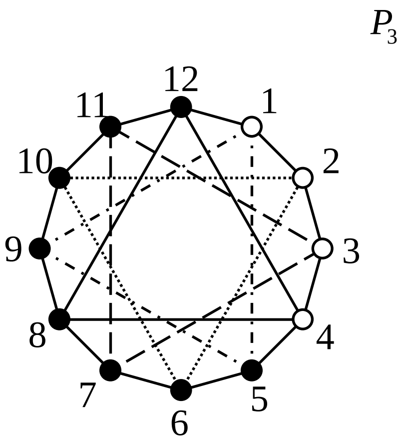


圖 4.2



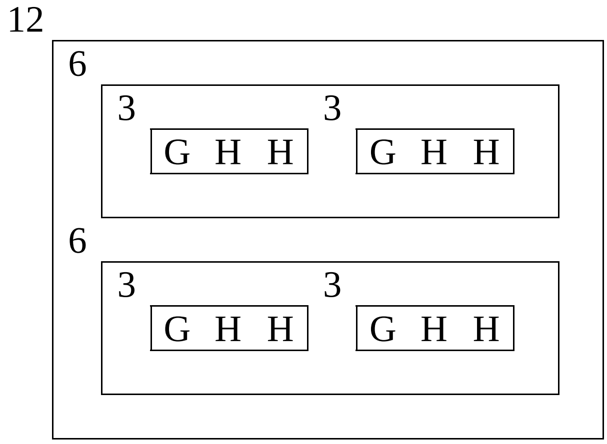


圖 4.3

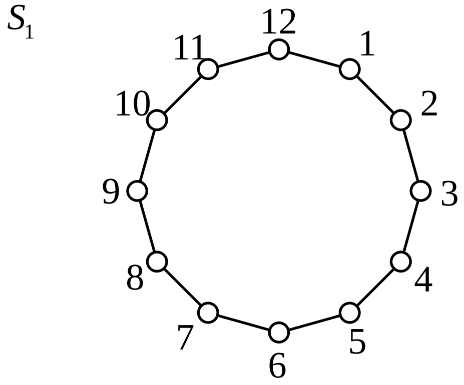
無論如何繪製結構圖，至少有一個鍊環符合此結構圖，但有可能多於一個。P_1與P_2恰只有一種，若它們的結構圖如圖 4，則P_1必為<GHGHGHGHGHGH>、P_2必為<GGHHGGHHGGHH>。但對於P_3，則我們就有八種不同的選擇，其中兩種是<GGGGHHHHHHHH>與<GHHGHHGHHGHH>。當選用P_3的結構圖時，我們選用哪一種探索佈局並無所謂。

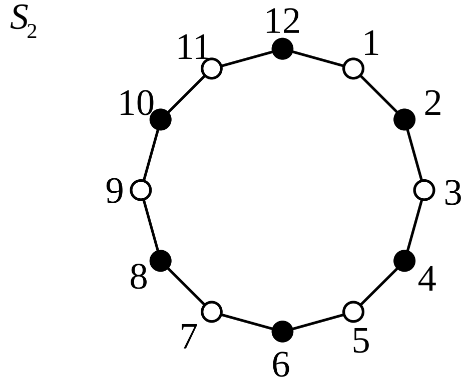
在研究到底該用哪種探索佈局之前，我們須要對狀態的記號稍加延伸。之前我們將桌子狀態表示成長度為 n 個字母{U, D}的鍊環。現在引進記號「e」—「either」代表此位置上的瓶子可能朝上或朝下，於是我們可以用鍊環來表示桌子狀態的部分訊息。例如，桌子的初始狀態S_1可以用公式S_1=<e^n>表示，因為一開始時，我們可以任選桌子的狀態。

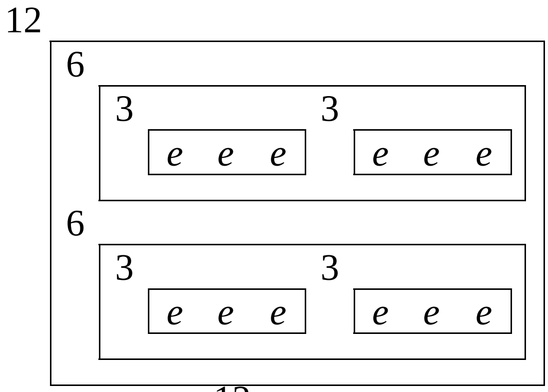
玩家依序用探索佈局P_1、P_2與P_3來作為頭三次的探查，無論瓶子的朝向為何，依序將所有探查到的瓶子變為朝上。經過這些探查後的效果，可由圖 5 察覺出，它逐步描述由狀態S_1到S_4的結構圖。

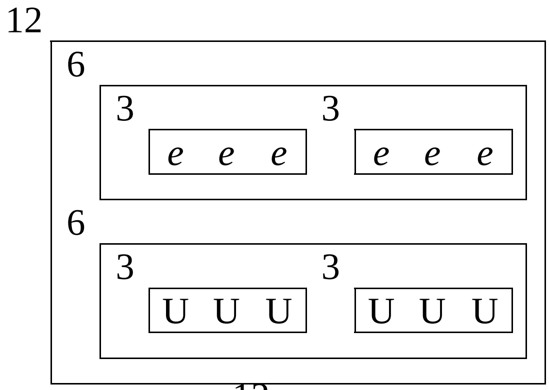
- 探索佈局P_1迫使其中一個正六邊形成為單調的，即變成狀態S_2；
- 探索佈局P_2將 6 隻手分別探查兩個正六邊形內的各一個正三角形，則它將迫使四個三角形中的第三個三角形又成為單調的，即變成狀態S_3；
- 探索佈局P_3探查每個正三角形內的各二個頂點，使得第三次探查將其餘三個 e 中的二個轉為朝上，故經過這三次探查，桌子狀態為S_4=<eU^{11}>。

經過任何一次操作後，剩下的 e 有可能全部朝上而使得鈴聲響起。現在要往最壞的情形考慮，亦即剩下的 e 當作全部朝下，也就是S_4實際上為<DU^{11}>。

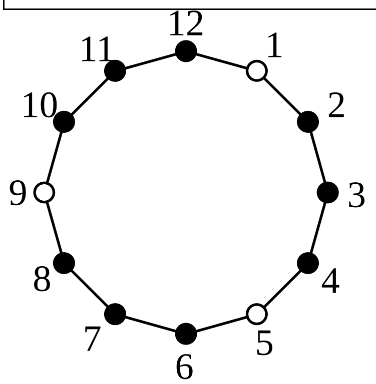




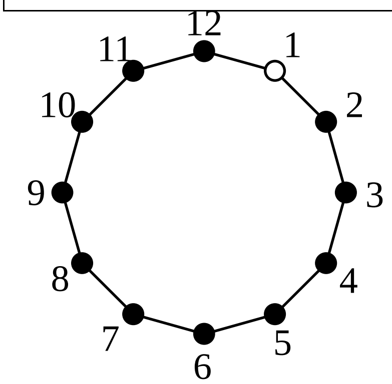


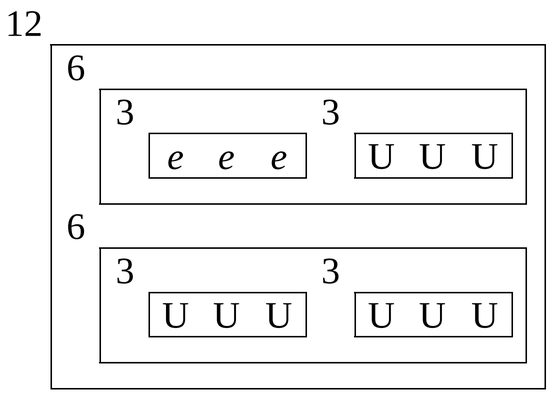


S_3



S_4





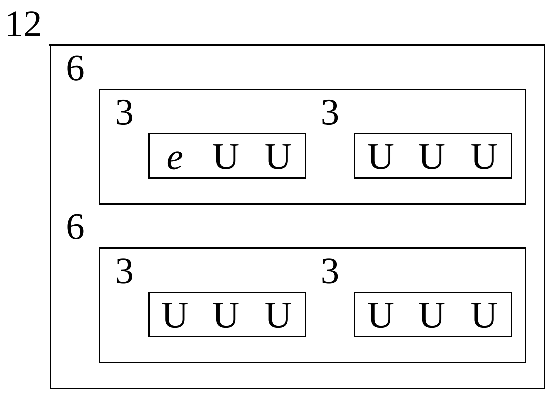
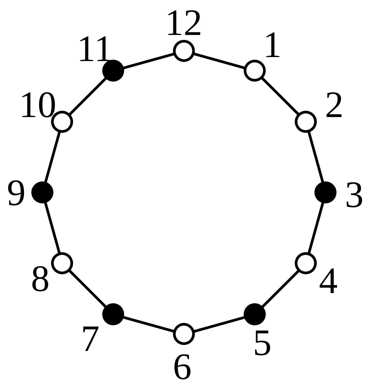
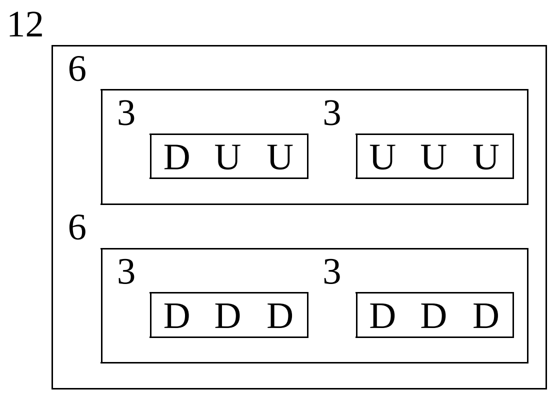


圖 5

我們將剛才討論的這一個部分策略稱為第一階段。第一階段的這三次探查迫使桌子的狀態成為只差一個位置上的瓶子外其它的瓶子全部都朝上。將這個唯一朝下的瓶子稱為異常的瓶子，同時也稱包含有這個瓶子的三角形為異常的。

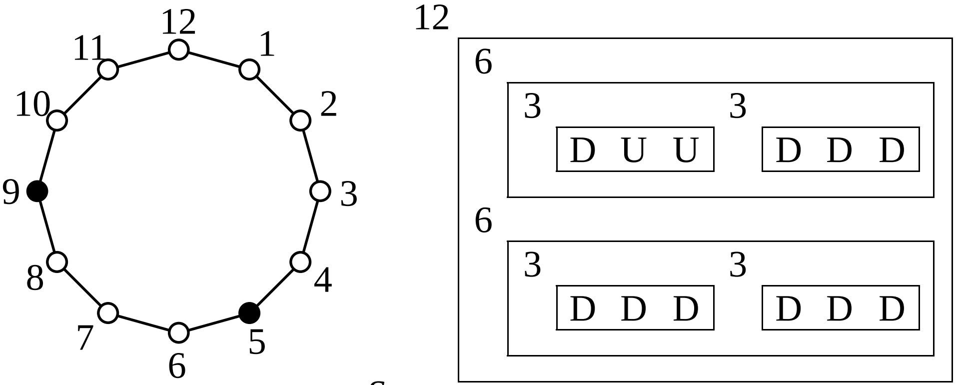
接下來怎麼辦？我們希望迫使桌子成為完全三次鍊環的狀態。運用上述的三種探查佈局來進行第二階段操作。首先，用 P_1 探查狀態 S_4，假設玩家觸摸到這個異常的瓶子，則只要將它轉為朝上鈴聲即會響起。因此，必須假設玩家探索的六邊形本來就是單調的，在此正六邊形內的瓶子全部朝上。此時，玩家可將此六邊形內的所有瓶子全部轉為朝下，它的結構圖變成下圖所示的 S_5。





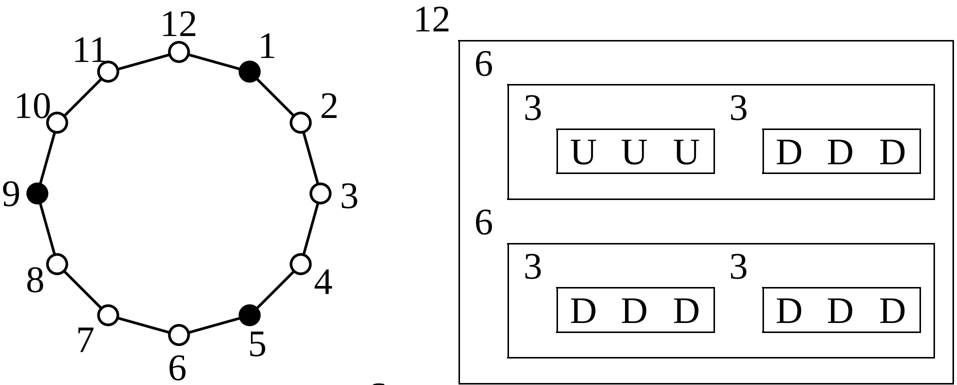
S_5

第二階段的第二次探查，用 P_2 探查兩個正六邊形內的各一個正三角形。如果玩家觸摸到其中一個三角形不是單調的，則這個三角形就是異常的。在此情況下，玩家可將這個異常的瓶子轉為朝上即可，這將使每個三角形都變成單調的狀態，換句話說，最後的狀態是完全三次。操作至此已達成目標，玩家即可不用再繼續第二階段的操作。而另一方面，玩家若探查到兩個都是單調的三角形，一個三角形全朝上，另一個三角形全朝下，此時玩家可讓朝下的三角形繼續保持朝下，將朝上的三角形轉為朝下，如下圖所示的結構圖 S_6。



S_6

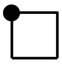
接下來，用 P_3 來完成第二階段的第三次，也是最後一次探查。P_3 是探查每個正三角形內的各二個頂點，此時面對的異常三角形的狀態為<DUU>，其它的三角形全朝下。玩家必須弄清楚哪個三角形是哪個，當他伸入三角形觸摸到二個頂點上的瓶子都朝下，則這個三角形是單調朝下的三角形，玩家可不改變瓶子的朝向；如果玩家伸入異常的三角形中，當觸摸的兩個瓶子都朝上，只須將它們全都轉為朝下，此時鈴聲必響起；當觸摸的瓶子一上一下時，只要將朝下的瓶子轉為朝上，這樣就能使異常的三角形變成單調的，即桌子的狀態變為狀態 S_7，而狀態 S_7 包括三個朝下的的三角形及一個朝上的三角形，故玩家已迫使桌子變成完全三次鍊環的狀態，符合引理 3 的要求。

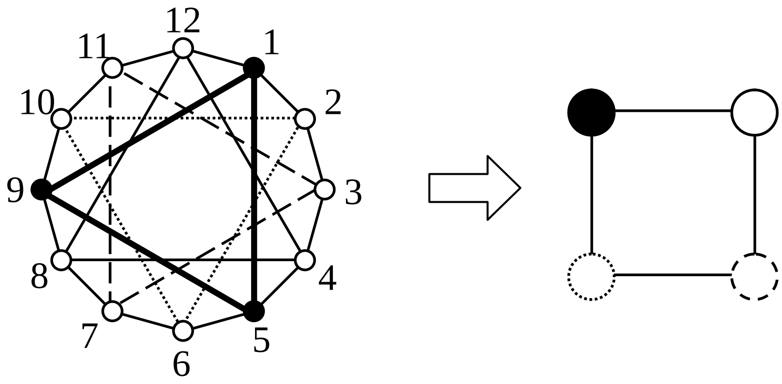


S_7

我們把前述的的策略手法稱為「先上後下」策略，第一階段，除了一個瓶子朝下外，其餘全部轉為朝上，而在第二階段，除了一個三角形朝上外，其他所有的三角形都朝下。接下來，就可以利用引理 3 來完成最後的任務。

現在把同一個三角形內的瓶子黏在一起視為一個大瓶子。由於三角形內三個瓶子的朝向都相同，它們的朝向即這個大瓶子的朝向。如此，這個問題變成

有四個大瓶子，初始狀態的朝向是  。由本文關於四角方桌的操作知只須要 2 隻大手(即 2×3 隻手)，即可在五次操作內可讓鈴聲響起。



由 n=12 的例子可勾畫出證明定理 1 的途徑：

A. 由引理 1 證明下界為 $(1-\frac{1}{p})n$ 隻手；

B. 由引理 3 證明至多用 $(1-\frac{1}{p})n$ 隻手即可迫使桌子成為完全 p 次鍊環的狀態；

C. 將同一個 p 邊形內的瓶子黏在一起視為一個大瓶子，因為它是單調的，它的朝向即為大瓶子的朝向，此時有 $\frac{n}{p}$ 個大瓶子，即須要 $f(\frac{n}{p})$ 隻大手可以完成任務，也就是 $p\times f(\frac{n}{p})$ 隻手可以完成任務。

現在我們來證明當 $n\neq 2^k$ 時，引理 3 的正確性。令桌子的邊數為 n，n 的最大質因數為 p。因為 $n\neq 2^r$ ，故知 $p\geq 3$。玩家構造的必勝策略滿足以下性質：使用不超過 $(1-\frac{1}{p})n$ 隻手就能使鈴聲響起或迫使桌子成為完全 p 次鍊環。

假設 n 經質因數分解後共有 j 項，其中最大的質因數為 p。若將 n 的質因數由小到大排列，則可記為 $n=p_1p_2\cdots p_j$ ，其中 $j\geq 1$ 、 $p_1\leq p_2\leq\cdots\leq p_j=p$ 。由此質因數分解式，可定義記號 l_i 與 r_i ，其中 l_i 為從 n 的第 1 個質因數到第 $i-1$ 個質因數的乘積，而 r_i 為從 n 的第 i 個質因數到第 j 個質因數的乘積，用數學式表示即為：$l_i=\prod_{1\leq k<i}p_k$ 、$r_i=\prod_{i\leq k\leq j}p_k$ ，其中 $1\leq i\leq j+1$。注意到，對於所有的 i，都有 $l_ir_i=n$。

為了使「先上後下」策略的推廣易於明了，可將 n 邊形表示為多種不同的方式。從外部開始，有一個 n 邊形桌子，或等價地說一個 r_1 邊形，或 p_1 個相互交疊的 r_2 邊形。每個 r_2 邊形包括 p_2 個相互交疊的 r_3 邊形；⋯。一般而言，每個 r_i 邊形包括 p_i 個相互交疊的 r_{i+1} 邊形。最後，每個 r_j 邊形包括 p_j 個頂點，即 $r_j=p_j$。 p_j 邊形在這一串分類的最低層，此類似於 n=12 時的三角形。在前段落我們說明 r_i 的意義，它將 n 邊形分割為許多不同邊數的多邊形，而 l_i 表示有多少個 r_i 邊形。實際上，對於每個 i，n 邊形恰可分為 l_i 個不同 r_i 邊形。

現在已可掌握在一邊情況下結構圖的梗概。方框有 j 層，在每層內有 l_i 個不同 r_i 邊形，這個 r_i 邊形又可分為 p_i 個 r_{i+1} 邊形。圖 6 為一般情況下第 i 層結構圖。

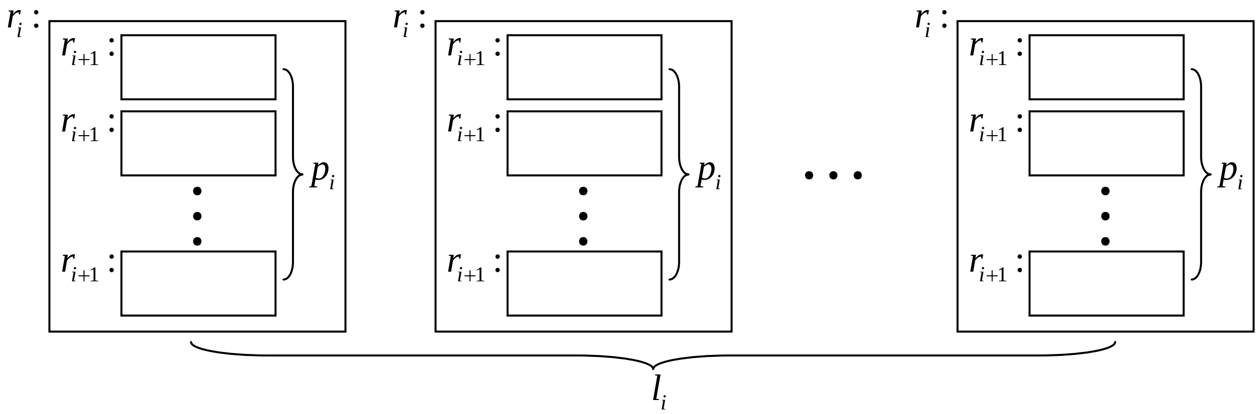


圖 6

對於一般情形的「先上後下」策略須要用到 j 種不同的探查佈局，以記號 P_1、P_2、⋯、P_j 表示之。在圖 6 中，描述了運用探查佈局 P_i 在第 i 層的結構圖。實際上，佈局 P_i 將探查在 r_i 邊形內除了一個以外的所有 r_{i+1} 邊形，簡稱這個情況為第 i 層的分解佈局。

任選一個佈局 P_i，依照情況不同，P_i 必須分解第 i 層。接著必須檢驗玩家是否有足夠多的手用以探查 P_i 佈局。而從之前的討論知探查第 i 層所須手之數量為

$$l_i(p_i-1)r_{i+1}=\frac{l_i r_i}{p_i}(p_i-1)=n(1-\frac{1}{p_i})\le n(1-\frac{1}{p})$$

因為允許使用 $(1-\frac{1}{p})n$ 隻手，其中 $p=p_j\ge p_i$，所以當探查佈局 P_i 時，玩家仍有足夠的手可使用。

玩家現在可以依照以下方式完成第一階段的探查，即依序從探查佈局 P_1 到探查佈局 P_j，將每個觸摸到的瓶子全部轉為朝上。用佈局 P_1 探查整個桌子 r_1 邊形內除了一個 r_2 邊形外的所有瓶子；接著用佈局 P_2 探查整個桌子 r_2 邊形內除了一個 r_3 邊形外的所有瓶子；繼續依此方法，用佈局 P_i 探查整個桌子 r_i 邊形內除了一個 r_{i+1} 邊形外的所有瓶子。當探查所有 P_j 之後，桌子頂多只會有一個朝下的瓶子。可以假設恰有一個瓶子朝下，否則所有瓶子都朝上即代表玩家獲勝。

經過第一階段的探查，已完成「先上後下」策略的「先上」這部分操作，使得除了一個異常的瓶子以外，所有的瓶子都朝上。

現在進行第二階段的操作。玩家依序操作探查佈局 P_1、P_2、⋯、P_j，但比第一階段稍微複雜些。考慮桌子由互相交疊的 p_i 邊形組合，在開始第二階段操作之前，所有的 p_j 邊形除了一個以外，其他全部朝上，而這個異常的 p_j 邊形內只有一個瓶子朝下。除最後一次探查外，玩家依以下方示操作：

如果玩家探查到這個異常的 p_j 邊形，則只須將異常的瓶子轉為朝上即可。此時桌子變成一個完全 p 次鍊環，玩家就可達成引理 3 的要求，不須要再操作第二階段的後續探查。

若探查的 p_j 邊形全都單調朝上，則將所有 p_j 邊形內瓶子轉為朝下；若探查的 p_j 邊形全都單調朝下，則不須做任何動作。

我們可以證明只有一個 p_j 邊形在第二階段的前 $j-1$ 次探查中未被探查到。論證的方法與第一階段的論證相同。探查佈局 P_1 將探查到除了一個以外的所有 p_j 邊形，而這個 p_j 邊形在 r_2 邊形內；探查佈局 P_2 將探查到除了一個以外的所有 r_3 邊形內的多邊形；以此類推。當探查 P_{j-1} 之後，除了一個 r_j 邊形以外，其中 $r_j = p_j$，其它的 p_j 邊形都已被探查過。更進一步地，可以假設這個沒被探查的 p_j 邊形就是異常的，這是因為如果幸運地探查到這個異常的 p_j 邊形，則只要調整其中異常的瓶子即可。故經過第二階段前 $j-1$ 次探查後，將所有非異常的 p_j 邊形轉為朝下，如此即可完成「先上後下」策略的「後下」部分操作。

接著進行第二階段的最後一次探查，此時桌子包含有一個異常的 p_j 邊形，其中的 p_j-1 個瓶子朝上、一個瓶子朝下，而其他所有的 p_j 邊形都是單調的朝下。最後一次探查，玩家使用探查佈局 P_j 觸摸每個 p_j 邊形中的 p_j-1 個頂點上的瓶子。注意到在此之前都不須要假設 $p=p_j\ge 3$，但此時這個假設變的相當重要。因在 $p_j\ge 3$ 時，玩家最後一次探查將觸摸到每個 p_j 邊形內至少 2 個瓶子，所以可摸到異常 p_j 邊形內至少有一個瓶子是朝上的，這樣就可以讓玩家研判出玩家用 p_j-1 隻手所探查的那個 p_j 邊形是異常的。而當 $p_j=2$ 時，就無法做到這一點，這是因當 $p_j=2$ 時，異常的 p_j 邊形變成狀態是<DU>的某條對角線，若玩家探查此對角線其中之一個端點，則他可能觸摸到朝下的瓶子，便無法區別與其他瓶子之差異。但如果假設 $p_j\ge 3$，則玩家可辨別出異常的 p_j 邊形。玩家對於非異常的 p_j 邊形可不採取任何動作，對於異常的 p_j 邊形則有兩種情況：當玩家觸摸到的瓶子中僅有一個朝下時，則將此瓶轉為朝上；當玩家觸摸到的 p_j-1 個瓶子中都朝上時，則他將所有瓶子轉為朝下。這兩種情況，最終這個異常的 p_j 邊形都將成為單調的狀態，它將結合引理 3 的條件。這是 $n\ne 2^k$ 時，引理 3 的完整證明。

接著在考慮 $n=2^k$ 的情況之前，先回到環球城市數學競賽 2009 秋季賽高中組高級卷的問題。此問題在 $n\ne 2^k$ 時無解，即不可能依照其操作規則而有保證能打開山洞門的策略，其理由爲：當 $n\ne 2^k$ 時，則必定能找到一個奇質數 p 整除 n，即 p 爲大於 2 的質數且 $p|n$。考慮圓桌內的正 p 邊形，由於整個圓桌非單調的，一定可以找到一個非單調的 p 邊形。因 p 是奇質數，在此 p 邊形內朝上的頂點數恆不等於朝下的頂點數。只要適當轉動桌子，至少會同時翻轉到一對不同朝向的頂點，永遠無法使 p 邊形變成單調的，此即永遠無法達成目標。

因此，環球城市數學競賽的問題也只須考慮 $n=2^k$，$k\ge 2$ 的情況。而環球城市數學競賽的操作規則比 Martin 的操作規則嚴格，前者必須將摸到的同時都翻轉，而後者可自由選擇哪幾隻手翻轉、哪幾隻手不能翻轉。故在 $n=2^k$，$k\ge 2$ 的情況，如果依照環球城市數學競賽問題的操作規則能找到必勝策略，利用此策

略亦可解決 Martin 的問題，再利用 Martin 操作規則的靈活性，可減少操作步驟，而最壞的狀況是次數相同。

當 k=0，早已達到目的。

當 k=1，即 n=2，若兩個頂點一上一下，則依照環球城市數學競賽問題的操作規則，用兩隻手則永遠無法達成目的，只能用一隻手。但依照 Martin 的操作規則一次就可以達成目的。

當 k=2，即 n=4 時，在本文前段已給出關於 Martin 的操作規則之一個五次操作的策略。故現僅須討論用環球城市數學競賽問題的操作規則。

首先用數碼 1 代表朝上、數碼 0 代表朝下，則知 n=4 的狀態有<0, 0, 0, 0>、<0, 0, 0, 1>、<0, 0, 1, 1>、<0, 1, 0, 1>、<0, 1, 1, 1>、<1, 1, 1, 1>六種，而其中狀態<0, 0, 0, 0>、<1, 1, 1, 1>已達成目的、狀態<0, 0, 0, 1>、<0, 1, 1, 1>為等價，這是因為把 1 換成 0、0 換成 1 後可變成另外一組。將這些狀態命名為：

狀態 0：<0, 0, 0, 0>或<1, 1, 1, 1>；狀態 1：<0, 1, 0, 1>；狀態 2：<0, 0, 1, 1>；狀態 3：<0, 0, 0, 1>或<0, 1, 1, 1>。同時定義一些操作：

操作 A ： 將相對面的兩個頂點都同時翻轉。
操作 B ： 將相鄰的兩個頂點都同時翻轉。
操作 C ： 將任何一個頂點翻轉。

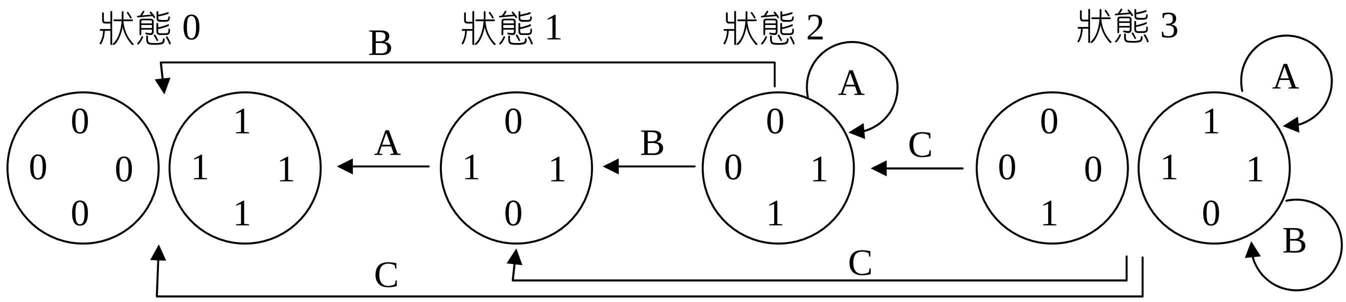
針對各種狀態進行各種操作，其結果如下表：

狀態＼操作	A	B	C
1	0	2	3
2	2	0, 1	3
3	3	3	0, 1, 2

可知：

1. 針對狀態 1 進行操作 A 即可達成目的，而對狀態 2、3 進行操作 A 皆不改變其狀態；
2. 針對狀態 2 進行操作 B 可達成目的或變成狀態 1，只要再做一次操作 A 即可達成目的，而對於狀態 3 進行操作 B 都不改變其狀態；
3. 針對狀態 3 進行操作 C 可變成狀態 1 或 2，此時再做一次操作 A，若尚未達成目的即可知此時為狀態 2，只要再依序操作 B、A 即可達成目的。

由上述可知，只要依序做以下的操作： ABACABA，則無論桌子的初始狀態為何，一定可以達成目的。其狀態間轉變的情況可用下圖表示：

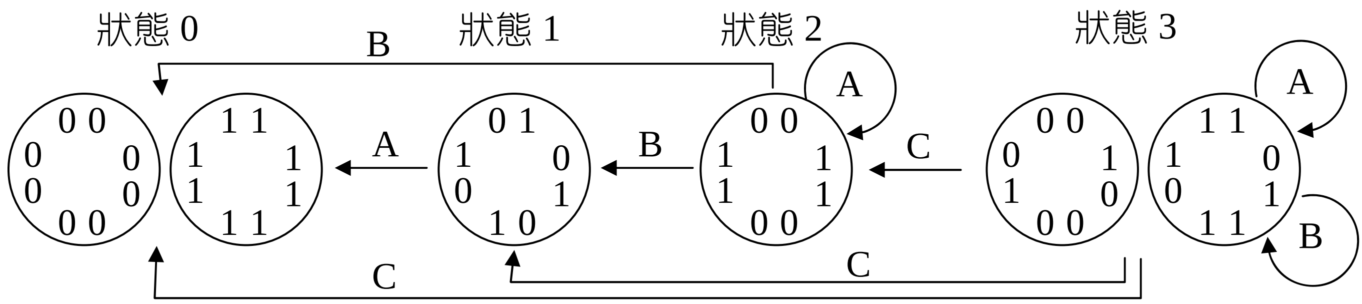


此操作事實與 Albert G. Stanger 的第二個變形問題的策略相同。

當 k=3，即 n=8 時，因 n 為偶數，故正 n 邊形上的頂點可以用直徑的兩端點兩兩配對，稱這二個端點互為相對點。

若初始狀態的每個頂點的朝向與相對點的朝向都相同，可將這兩個相對點視為黏在一起的物件，則此狀態就等價於 n=4 的情況，此時操作 A 成為將間隔為 1 的點及其相對點翻轉、操作 B 成為將相鄰兩對的頂點及其相對點翻轉、操作 C 成為將任何一個頂點及其相對點翻轉。

由 n=4 的必勝策略知，用操作 ABACABA 也必能達成目的，其狀態間轉變的情況如下圖所示：



若是一般狀態時，用 $\boxed{m}$ 表示桌子的頂點中有多少對相對點的朝向相同，其中 $0 \le m \le 4$。當有二對相對點朝向相同時，以 $\boxed{2'}$ 表示此二對相對點相鄰、以 $\boxed{2}$ 表示此二對相對點不相鄰。再定義一些操作：

操作 D ： 將任意連續的四個頂點都同時翻轉。
操作 E ： 將任意間隔為 1 的兩個頂點都同時翻轉。
操作 F ： 將任意相鄰的兩個頂點都同時翻轉。
操作 G ： 將任意一個頂點翻轉。

針對各種狀態進行各種操作，其結果如下表：

狀態＼操作	D	E	F	G
$\boxed{0}$	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{2'}$	$\boxed{1}$
$\boxed{2}$	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$, $\boxed{0}$	$\boxed{2'}$	$\boxed{1}$, $\boxed{3}$
$\boxed{2'}$	$\boxed{2'}$	$\boxed{2'}$	$\boxed{0}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$	$\boxed{1}$, $\boxed{3}$
$\boxed{1}=\boxed{3}$	$\boxed{1}$, $\boxed{3}$	$\boxed{1}$, $\boxed{3}$	$\boxed{1}$, $\boxed{3}$	$\boxed{0}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2'}$, $\boxed{4}$

由上表可知：

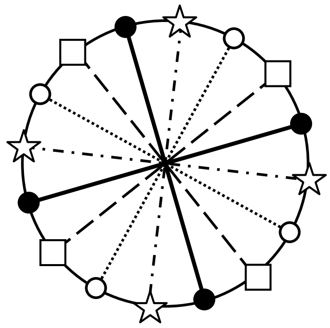
1. 針對狀態 $\boxed{0}$ 進行操作 D 即可變成狀態 $\boxed{4}$，而針對狀態 $\boxed{2}$、$\boxed{2'}$、$\boxed{1}$、$\boxed{3}$ 進行操作 D 皆不改變其狀態；
2. 針對狀態 $\boxed{2}$ 進行操作 E 可變成狀態 $\boxed{4}$ 或變成狀態 $\boxed{0}$，故再做一次操作 D 即可變成狀態 $\boxed{4}$，而對狀態 $\boxed{2'}$、$\boxed{1}$、$\boxed{3}$ 進行操作 E 都不改變其狀態；
3. 針對狀態 $\boxed{2'}$ 進行操作 F 可變成狀態 $\boxed{4}$ 或狀態 $\boxed{2}$ 或狀態 $\boxed{0}$，此時再做一

次操作 E，若尚未變成狀態$\boxed{4}$即可得知此時為狀態$\boxed{0}$，只要再做一次操作 D 即可變成狀態$\boxed{4}$。

4. 針對狀態$\boxed{1}$、$\boxed{3}$進行操作 G 可變成狀態$\boxed{0}$、$\boxed{2}$、$\boxed{2'}$或狀態$\boxed{4}$，此時再做一次操作 D，若尚未變成狀態$\boxed{4}$即可得知此時為狀態$\boxed{2}$、$\boxed{2'}$，只要再做一次操作 E，若尚未變成狀態$\boxed{4}$即可得知此時為狀態$\boxed{0}$、$\boxed{2'}$此時再做一次操作 D，若尚未變成狀態$\boxed{4}$即可得知此時為狀態$\boxed{2'}$，只要再做一次操作 F，若尚未變成狀態$\boxed{4}$即可得知此時為狀態$\boxed{0}$、$\boxed{2}$，只要再做一次操作 D，若尚未變成狀態$\boxed{4}$即可得知此時為狀態$\boxed{2}$此時再做一次操作 E，若尚未變成狀態$\boxed{4}$即可得知此時為狀態$\boxed{0}$，只要再做一次操作 E，即可變成狀態$\boxed{4}$。

由上述可知，若將操作 ABACABA 用 X 代替，則只要依序做以下的操作：XDXEXDXFXDXEXDXGXDXEXDXFXDXEXDX，一定可以達成目的。

重複地使用操作 X=ABACABA 主要目的是保證遇到狀態$\boxed{4}$時,不會重回到狀態$\boxed{0}$、$\boxed{1}$、$\boxed{2}$、$\boxed{2'}$、$\boxed{3}$，而是進入到狀態 0、1、2、3，且最終能達到目的。



當 k=4，即 n=16 時，把桌子上可構成正方形的四個頂點配為一組。事實上這一組的四個點是由兩雙相對點組成，連接這兩雙相對點的兩條直徑互相垂直，如圖所示：

桌子的 16 個點可分為四組，縮減為連續的四個點。若這 16 個點中，每個頂點與相對點的朝向都相同，則只須要依照 n=8 時的策略，將每個頂點及其相對點視為一體即可。

若這 16 個點並未處於上述狀態，則可繼續定義一些操作 H、I、J、K、L、M、N、O，其中以實心圓點●代表翻轉的頂點：

➢ 各項操作之擴張

$n=2^k$	狀態 0	操作 A	操作 B	操作 C	操作 D	操作 E	操作 F	操作 G	操作 H
$n=2^1$									
$n=2^2$									
$n=2^3$									
$n=2^4$									
		操作 I	操作 J	操作 K	操作 L	操作 M	操作 N	操作 O	

【註】1. 上表中，操作種類的總數爲 2^k-1；

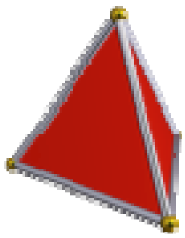
2. 前 $2^{k-1}-1$ 次操作是將 $n=2^{k-1}$ 的操作擴張爲同時操作此頂點與相對點，後 2^{k-1} 次操作是複製狀態 0 及 $n=2^{k-1}$ 的操作的位置對應前半的頂點上，後半的頂點都不操作。

若令 Y= XDXEXDXFXDXEXDXGXDXEXDXFXDXEXDX，則依序操作：
YHY**I**YHY**J**YHYIYHY**K**YHYIYHYJYHYIYHY**L**YHYIYHYJYHYIYHYKYHYI
YHYJYHYIYHY**M**YHYIYHYJYHYIYHYKYHYIYHYJYHYIYHYLYHYIYHYJ
YHYIYHYKYHYIYHYJYHYIYHY**N**YHYIYHYJYHYIYHYKYHYIYHYJYHYI
YHYLYHYIYHYJYHYIYHYKYHYIYHYJYHYIYHYMYHYIYHYJYHYIYHYK
YHYIYHYJYHYIYHYLYHYIYHYJYHYIYHYKYHYIYHYJYHYIYHY**O**YHYI
YHYJYHYIYHYKYHYIYHYJYHYIYHYLYHYIYHYJYHYIYHYKYHYIYHYJ
YHYIYHYMYHYIYHYJYHYIYHYKYHYIYHYJYHYIYHYLYHYIYHYJYHYI
YHYKYHYIYHYJYHYIYHYNYHYIYHYJYHYIYHYKYHYIYHYJYHYIYHYL
YHYIYHYJYHYIYHYKYHYIYHYJYHYIYHYMYHYIYHYJYHYIYHYKYHYI
YHYJYHYIYHYLYHYIYHYJYHYIYHYKYHYIYHYJYHYIYHY
即可達到 n=16 時之目的。當 $n=2^5$、2^6、2^7、2^8、…、2^k 時，依照環球城市數學競賽問題的操作規則均可達成目的。由此同時也可得知依照 Martin 的操作規則時，仍可保證能達成目的，且可能可以減少操作次數。

推廣至立體的情形

建國中學王新博同學將此問題可以推廣到「多面體桌」上，其作品榮獲 2011 年國際科展加拿大正選。「多面體桌」上的規則將變為：
「桌體」為一個正多面體，桌體的 n 個頂點都有各有一個深孔，每個孔底都放置有一個酒瓶，酒瓶可能朝上(朝多面體外部)也可能朝下(朝多面體內部)放置。玩家有 k 隻手，每次可以伸入 k 個不同的深孔內並觸摸深孔內瓶子的朝向。對於每一個多面體及 k，探究是否有策略在有限次的操作後保證能使鈴聲響起?

正四面體



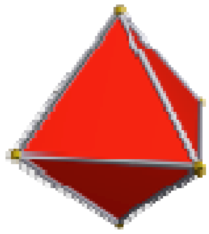
正四面體有 4 個頂點，依照剛剛討論平面的情況：
$k\ge(1-\frac{1}{p})n$=$(1-\frac{1}{2})\times 4=2$，也就是兩隻手就夠了。

但這在正四面體的情況是不對的。理由是：正四面體的任兩個頂點都相鄰，因此不論是哪兩個頂點沒有被觸摸，桌子總能把兩個朝向不一樣的酒瓶轉到這兩個位置，操作便永遠不會結束。意即，「正『四』面體」在這裡就好像「質數」一樣，不能再分解，需要 3 隻手。要達成目標的策略也不難。首先將其中三個酒瓶翻轉向內；第二次觸摸時，若有摸到任何一個朝外的酒瓶，將它翻轉向內，從而所有的酒瓶都向內；否則將摸到的三個向朝內的酒瓶翻轉向外，讓四個酒

瓶都朝外。

正八面體

正八面體有 6 個頂點，依照剛剛討論平面的情況：



$$k \geq (1-\frac{1}{p})n=(1-\frac{1}{3})\times 6 = 4$$

也就是四隻手就夠了。

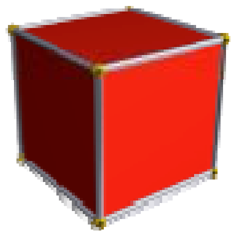
而這是對的，理由是我們真的可以把正八面體當作正六邊形來看！簡單的對應如下：我們發現該六個頂點可以分成「三對」，前後一對、左右一對、上下一對，相當於正六邊形的三對頂點。

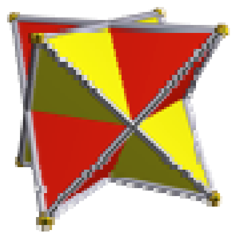
若手的數量不到四隻，考慮正八面體上兩個相對的面（是兩個三角形），那麼總是會有其中一個三角形只被分配到一隻手，而無法達成目標了。

套用平面上正六邊形的策略即可達成目標：首先將其中兩對相對頂點翻轉向內，接著將任一個三角形翻轉向內。此時鈴聲不是響起了就是恰剩下一個酒瓶朝外。接著觸摸其中兩對相對頂點，如果發現一個朝外的酒瓶，則將它翻轉向內，鈴聲立響；否則分別將每一對相對的其中一個酒瓶翻轉向外。此時每一對相對頂點都不同朝向。下一步是任選一個三角形全部翻轉，讓所有的相對頂點各自朝向都相同。此時剩下的步驟就與平面上三角形的策略一樣了。

正六面體

藉由觀察，可以發現正六面體可以視為兩個正四面體的疊合：也就是說，雖然正六面體有八個頂點，但它的「因數分解」應該寫成：Cube(8)=2×Tetrahedron(4)，於是剛剛的關係式應該寫為：





$$k \geq (1-\frac{1}{Terahedron(4)})\times Cube(8) = 6，$$

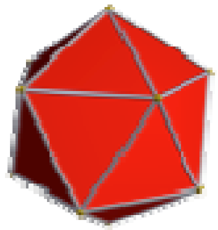
也就是六隻手就夠了。

仿造之前上限的證明，考慮組成正六面體頂點的兩個正四面體。若手的數量不到六隻，那麼總是會有其中一個正四面體只被分配到兩隻手，而剛剛我們已經證明正四面體無法只用兩隻手達成目標。若是這個正四面體的酒瓶一直沒有辦法翻為朝向都相同，更遑論整個正六面體。

模仿正八面體的策略達成目標：首先將其中三對相對頂點翻轉向內，接著將其中一個正四面體翻轉向內。此時鈴聲不是響起了就是恰剩下一個酒瓶朝外。接著觸摸其中三對相對頂點，如果發現一個朝外的酒瓶，則將它翻轉向內，鈴聲立響；否則，分別將每一對的其中一個酒瓶翻轉向外。此時每一對相對頂點都不同朝向。

下一步是任選一個正四面體全部翻轉，讓所有的相對頂點各自朝向都相同。此時剩下的步驟就與平面正四面體的策略一樣了。

正二十面體



正二十面體可以視為是「六」對「兩邊形」頂點的組合，

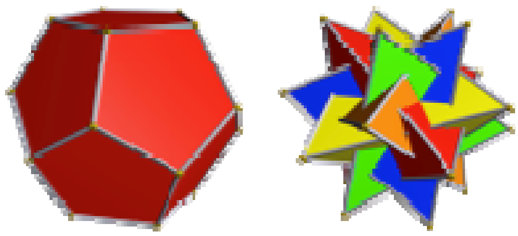
因此：$k \ge (1-\frac{1}{6}) \times 12 = 10$，也就是須要十隻手才夠。

若沒有探查的空隙 G 不小於三個時，其中一定有兩個空隙的路徑長不是 3。不論路徑長是 1 還是 2，我們都可以用它「走」過整個正二十面體。也就是說：當這個正二十面體的朝向還沒完全相同時，我們總能把兩個朝向不一樣的酒瓶轉到這兩個空隙的位置，操作便永遠不會結束。

但我們剛剛說有腳的地方沒有手、不能觸摸、不能翻轉，因此這不是「最後一步」，真正的「最後一步」不會出現，操作可能會一直進行下去。

模仿正八面體的策略達成目標：首先將其中五對相對頂點翻轉向內，接著將其中六個不成對的頂點全部翻轉向內。此時鈴聲不是響起就是恰剩下一個酒瓶朝外。接著觸摸其中五對相對頂點，如果發現一個朝外的酒瓶，則將它翻轉向內，鈴聲立響；否則，分別將每一對的其中一個酒瓶翻轉向外。此時每一對相對頂點都不同朝向。下一步是任選六個不成對的頂點全部翻轉，讓所有的相對頂點各自朝向都相同。此時剩下的步驟就與平面「『質數六』邊形」的策略一樣了。

正十二面體



正十二面體可以視為是「五」個「正四面體」的組合，因此：$k \ge (1-\frac{1}{5}) \times 20 = 16$，也就是須要十六隻手才夠。

若沒有探查的空隙 G 不小於五個時，其中一定有兩個空隙的路徑長不是 3。不論路徑長是 1、2 還是 4，我們都可以用它「走」過整個正十二面體。也就是說：當這個正二十面體的朝向還沒完全相同時，我們總能把兩個朝向不一樣的酒瓶轉到這兩個空隙的位置，操作便永遠不會結束。

模仿正八面體的策略達成目標：首先將除了某個五邊形以外的所有頂點翻轉向內，接著將其中四個正四面體翻轉向內。此時鈴聲不是響起就是恰剩下一個酒瓶朝外。接著觸摸其中四個正四面體，如果發現朝外的一個酒瓶，則將它翻轉向內，鈴聲立響；否則，分別將每個正四面體的其中一個酒瓶翻轉向外。此時每一個正四面體都有三個酒瓶朝內、一個酒瓶朝外。

下一步與正四面體做法中的第二步相同，若有摸到任何一個朝外的酒瓶，將它翻轉向內，從而所有的酒瓶都向內；否則將摸到的三個朝內的酒瓶翻轉向外，讓四個酒瓶都朝外。此時剩下的步驟就與平面正五邊形的策略一樣了。