Contents

積分學 (一)：不定積分 (Indefinite Integration)

1.1 微分與積分

設 f 為定義在區間 (a,b) 上的可微函數。 由微分定義

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

其中 $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$. 當 Δx 趨向於零時，則 $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ 的極限就是 $f'(x) = \frac{df}{dx}$。

現在，我們將問題反過來問：

若 g 為定義在 (a,b) 區間上，能否找出函數 G 定義在 (a,b) 區間上並滿足

$$\frac{dG(x)}{dx} = g(x) \qquad (\text{即 } G' = g)$$

我們稱函數 G 為 g 的「反導函數」(antideriavative)。由 g 求出 G 的過程稱為「積分」(integration) 而且 G 並不是唯一的。

例 1.1 考慮

$$g(x) = 2x。$$

由於 $G_0(x) = x^2,\ G_1(x) = x^2+1,\ G_2(x) = x^2+2, \ldots$ 的導數都是 $g(x)$，所以 $G_0, G_1, G_2, \ldots$ 都是 g 的 反導函數。

上例並非偶然現象。事實上，我們有

定理 1.2：設 G 是 g 的一個反導函數，即 G 滿足

$$\frac{dG(x)}{dx} = g(x)$$

則 g 的反導函數恰巧都形如

$$G_C(x) = G(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

證明： 首先觀察

$$\frac{dG_C(x)}{dx} = \frac{dG(x)}{dx} + \frac{dC}{dx} = g(x) + 0 = g(x),$$

則 G_C 都是 g 的反導函數。若函數 F 也是 g 的反導函數，即

$$\frac{dF}{dx} = g.$$

則

$$F' = G'$$

或

$$\frac{d}{dx}(F - G) = 0.$$

由於可微函數 f 在某點 x 處的切線斜率等於 $f'(x)$。上式表明函數 $F - G$ 在每一點的切線都是水平線（斜率 $= 0$）。也就是説圖形 $y = F(x) - G(x)$ 根本沒有升降，因此

$$F(x) - G(x) \equiv \text{常數} C,$$

或

$$F(x) = G(x) + C,$$

即

$$F(x) = G_C(x).$$

□

若函數 G 是 g 的一個反導函數，即 G 滿足

$$\frac{dG}{dx} = g,$$

為了方便，記

$$G(x) = \int g(x)dx + C, \tag{1.1}$$

其中 C 是為常數。又若只憑條件

$$\frac{dG}{dx} = g \tag{1.2}$$

是不足以決定 G，且由定理 1.2 知，此條件 (1.1) 可在誤差為一常數 C 之下決定 G。這就是公式 (1.2) 中 C 的由來。此外，習慣上稱 $\int g dx$ 為 g 的「不定積分」(indefinite integral)。與微分相似，積分也有線性性質。

<u>定理 1.3</u>

(1) $\displaystyle\int (f \pm g)dx = \int f dx \pm \int g dx.$

(2) $\displaystyle\int kf dx = k \int f dx, \quad k$ 為常數。

證明： 設 $\int fdx = F + C$, $\int gdx = G + C$ (由於 C 是任意的，不妨將 所有這種任意常數都寫成 C)。不過，我們有很奇怪的約定：

$$C + C = C, \qquad C - C = C, \qquad -C = C$$

$$C \cdot C = C, \qquad C/C = C \quad \text{除數 } C \text{ 不為零。}$$

於是

$$\frac{dF}{dx} = f, \qquad \frac{dG}{dx} = g,$$

因此

$$\frac{d(F+G)}{dx} = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dx} = f(x) + g(x).$$

換句話說，$F + G = \int (f + g)dx + C$ 或

$$\int (f+g)dx = F + G + C = \int fdx + \int gdx + C.$$

這就是 (1)。而 (2)的證明留作習題！ □

底下我們將給出一個關於積分和微分的定理。

定理 1.4

(1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int fdx = f,$

(2) $\displaystyle\int \frac{d}{dx}fdx = f + C.$

證明： 設 F 為 f 的一個反導函數，即 $F = \displaystyle\int fdx + C$ 且 F 滿足 $\dfrac{dF}{dx} = f$。 由此，

$$\frac{d}{dx}\int fdx = \frac{d}{dx}(F + C) = \frac{dF}{dx} = f.$$

至於第二個公式，我們用更古怪的技巧。設

$$g = \int \frac{d}{dx}fdx + C.$$

由定理 1.4 (1) 知

$$\frac{dg}{dx} = \frac{df}{dx}, \quad \text{即} \quad \frac{d(g-f)}{dx} = 0.$$

我們已經討論過這種情形，故得到 $g - f = C$ 或 $g = f + C$。所以

$$\int \frac{d}{dx}fdx = g + C = f + C.$$

□

總括來說，我們有

$$\frac{d\,\cdot}{dx} \longleftrightarrow \int \cdot\, dx.$$

這裡 $\longleftrightarrow$ 表示互為反運算（但可能差一個任意常數 C）。

1.2 簡單積分表

由於積分是微分的反運算，我們先由已知的微分公式入手。回顧下列公式：

(1)	$\frac{d}{dx}C = 0, \quad C$ 為常數。	(2)	$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
(3)	$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$	(4)	$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
(5)	$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$	(6)	$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$
(7)	$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$	(8)	$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$
(9)	$\frac{d}{dx}e^x = e^x$	(10)	$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a, \quad a > 0$
(11)	$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$	(12)	$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1$
(13)	$\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(14)	$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$
(15)	$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$		

由定理 1.4 的 (2)，我們可從上列公式得到底下積分表。

$\int \cdot\, dx \ \longrightarrow$ ，$\longleftarrow \ \frac{d}{dx}\,\cdot$

	f	$F = \int f dx + C$
(1)	0	C
(2)	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
(3)	$\sin x$	$-\cos x + C$
(4)	$\cos x$	$\sin x + C$
(5)	$\sec^2 x$	$\tan x + C$
(6)	$\sec x \tan x$	$\sec x + C$
(7)	e^x	$e^x + C$

	f	$F = \int f dx + C$
(8)	a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
(9)	$\frac{1}{x}$	$\ln x + C, x > 0$
(10)	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1} x + C, -1 < x < 1$
(11)	$\frac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1} x + C$
(12)	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\sec^{-1} \lvert x\rvert + C$

上列積分表公式都源自於微分的反運算。例如 (2)：

$$\frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}\frac{d}{dx}x^{n+1} = \frac{1}{n+1}(n+1)x^n = x^n.$$

所以

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

但請注意 (1) 的公式

$$\int 0 dx = C \neq 0.$$

例 1.5 試計算

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}\, dx &= \int x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C \qquad (\text{ 公式 } (2), n = \frac{1}{2}) \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}} + C.\end{aligned}$$

例 1.6 試計算

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2} dx &= \int x^{-2} dx \\ &= \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + C \quad (\text{公式}(2), n = -2) \\ &= -\frac{1}{x} + C.\end{aligned}$$

例 1.7 試計算

$$\begin{aligned}\int (e^x + \frac{1}{x^2} - 4\cos x)\, dx &= \int e^x\, dx + \int \frac{1}{x^2} dx - \int 4\cos x\, dx \\ &= \int e^x\, dx + \int x^{-2} dx - 4\int \cos x\, dx \\ &= e^x + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - 4\sin x + C \\ &= e^x - \frac{1}{x} - 4\sin x + C.\end{aligned}$$

※練習題※

1. 試算

(a) $\displaystyle\int dx$

(b) $\displaystyle\int(\sqrt{x}-0.15x+2.73x^3)dx$

(c) $\displaystyle\int e^x(1+\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}})dx$

(d) $\displaystyle\int(\sqrt{u}+1)(\sqrt{u}-1)du$

(e) $\displaystyle\int\frac{t^2+t-7}{t}dt$（用 t 或 x 作自 變量有什麼不一樣？）

(f) $\displaystyle\int\frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx$

(g) $\displaystyle\int(\frac{1+x}{x})^2dx$

(h) $\displaystyle\int(\cos x-\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{4\sqrt{1-x^2}})dx$

(i) $\displaystyle\int\frac{2+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}d\theta$

2. 驗證以下公式：

(a) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}+C$

(b) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{b-a}\ln\frac{x+a}{x+b}+C$

(c) $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+C$

(d) $\displaystyle\int\sec x\,dx=\ln\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})+C=\ln|\sec x+\tan x|+C$

(e) $\displaystyle\int\tan^{-1}x\,dx=x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

（提示：對右方微分 $=$ 左方被積分函數。）

3. 設 $f(x)=|x|, x\neq 0$。試證：

$$\frac{df(x)}{dx}=\begin{cases}1 & \text{當}x>0\\ -1 & \text{當}x<0.\end{cases}$$

（提示：研究 $y=|x|$ 的圖形）

由此推出

$$\frac{d}{dx}|x|=\frac{|x|}{x}, x\neq 0.$$

4. 利用(3)的結果，驗證以下推廣了的積分公式

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+C.$$

你可以推廣第(2)題的(a),(b),(d)及(e)而得到新的公式嗎？

5. 證明公式
$$\int kf dx = k\int f dx + C,$$
其中 k 為常數。（k 可以是零嗎？）

6. （直線運動）今有一質點，在時間為 t 時，其水平位置記為 $x(t)$ 。又在時間為 t 時，此質點之速度為
$$\frac{dx}{dt} = x'(t)$$
當 $t = 0$ 時，我們觀察得
$$x(0) = 1, x'(0) = 0.$$
若已知此質點以固定不變的加速度
$$\frac{d}{dt}x' = 2$$
移動。試求 $x(t)$ 的表達式。
（提示：這個問題是由 x'' 求 x 。所以應該按步就班地先由 x'' 求 x'，再由 x' 求 x。注意，任意（$=$ 未知）常數在這裡是可 以被給出的初始條件所決定的。）

以上是質點的等加速直線運動。對於一般的質點運動（變加速三維運動），有興趣的同學請與您們的老師研究。

積分學 (二)： 積分技巧

如果只用 §1.2 的積分表，還有很多函數無法求積分。例如

$$\int \cos 3x\, dx.$$

然而，我們有

$$\frac{d}{dx}\sin 3x = 3\cos 3x.$$

於是

$$\int \cos 3x\, dx = \int \frac{1}{3}\left(\frac{d}{dx}\sin 3x\right)dx = \frac{1}{3}\int \frac{d}{dx}(\sin 3x)dx = \frac{1}{3}\sin 3x + C.$$

對不在積分表中的函數，我們不可能每次都這樣求積分，因此需要總結出一些規律和辦法。

我們用一個簡單的原則來發展各種積分技巧：

$$\text{微分} \longleftrightarrow \text{積分}$$

具體的說：有一個微分的法則就有一個積分的法則。

2.1 變數代換 (Integration by Substitution)

假設 $y = f(x)$ 和 $x = g(t)$，則

$$y = f(g(t)) = f \circ g(t).$$

由連鎖律 (chain rule) 可知 $(f(g(t)))' = f'(g(t)) \cdot g'(t)$. 同時對等式兩邊求不定積分可得

$$\int f'(g(t))g'(t)dt = \int (f(g(t))(t))'dt = f(g(t)) + C,$$

其中第二個等式可由定理 1.4(2) 得到。若將 $g(x)$ 用符號 u 來表示，則上式可改寫為

$$\int f'(g(t))g'(t)dt = \int f'(u)u'dt.$$

在此記 $u'dt$ 為 du，則我們可進一步得到

$$\int f'(g(t))g'(t)dt = \int f'(u)du = f(u) + C = f(g(t)) + C.$$

例 2.1 求 $\displaystyle\int \sin^5 x \cos x\, dx$.

解 ：由微分公式可知 $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$. 故令 $\sin x = u$，則 $du = u'dx = \cos x dx$. 因此

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \int u^5 du = \frac{u^{5+1}}{5+1} + C = \frac{u^6}{6} + C,$$

所以

$$\int \sin^5 x \cos x\, dx = \frac{\sin^6 x}{6} + C.$$

例 2.2 求 $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x} dx$.

解 ：由微分公式可知 $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$. 故令 $\ln x = u$，則 $du = u'dx = \frac{1}{x}dx$. 因此

$$\int \frac{1}{x\ln x}\, dx = \int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C.$$

有些時候，局部積分的對象並不是很容易就被確定下來。一個有用原則是：“處理你不喜歡的部份”，並配合“公式”：

$$du = u'dx = \frac{du}{dx}dx.$$

例 2.3 求 $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

解 ：在這裡$\sqrt{x}$ 最討人厭，所以令 $u = \sqrt{x}$ 或 $u^2 = x$, 則 $du = u'dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ 或 $dx = 2udu$。因此

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} &= \int \frac{2u}{1+u} du \\
&= 2\int \left(1 - \frac{1}{1+u}\right) du \\
&= 2\int du - 2\int \frac{1}{1+u} du \\
&= 2u - 2\ln|1+u| + C \\
&= 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C.
\end{aligned}$$

接下來讓我們算算幾個利用三角函數來求積分的典型例題。

例 2.4 求 $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx, \qquad (a > 0).$

解 ：令

$$x = a\sin t, \qquad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

於是

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} = \sqrt{a^2\cos^2 t} = a\cos t,$$

並且

$$dx = (a\sin t)'dt = a\cos tdt.$$

所以

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = a^2\int \cos^2 tdt = a^2\int \frac{1 + \cos 2t}{2}dt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C.$$

又因 $t = \sin^{-1}(x/a)$，所以

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2 \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} = \frac{2x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2}.$$

因此，

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2}dx &= \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} \cdot \frac{2x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2} + C \\ &= \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + C. \end{aligned}$$

例 2.5 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$

解 ：令

$$x = a\tan t, \qquad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

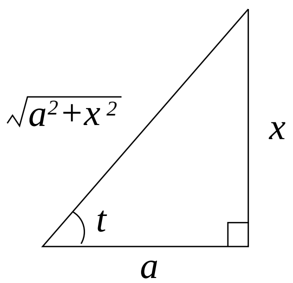
由此

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + \tan^2 + a^2} = \sqrt{a^2(\tan^2 + 1)} = \sqrt{a^2\sec^2 t} = a\sec t,$$

並且 $dx = d(a\tan t) = a\sec^2 tdt$。於是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{a\sec^2 tdt}{a\sec t} = \int \sec tdt = \ln|\sec t + \tan t| + C.$$

最後，由下圖



得

$$\sec t = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} \quad \text{和} \quad \tan t = \frac{x}{a},$$

所以

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right| + C \;= \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C.$$

（這是因為 $-\ln a + C =$ 常數及 $x+\sqrt{a^2+x^2} > 0$。）

例 2.6 求 $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx.$

解 ：令

$$u = x^2 - x + 1$$

於是 $du = (2x-1)dx$. 所以

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|x^2-x+1| + C.$$

例 2.7 求 $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx$。

解 ：若令

$$u = x^2 - x + 1,$$

則

$$du = (2x-1)dx \neq (x-2)dx.$$

一個小技巧可以幫上忙，即

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x^2-x+1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{2x-4}{x^2-x+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{3}{x^2-x+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{x^2-x+1}\right). \end{aligned}$$

於是

$$\begin{aligned} \int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx. \end{aligned}$$

對於第二個積分，另一個小技巧給出：

$$\int \frac{1}{x^2-x+1}dx = \int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}dx$$

設 $v=x-\frac{1}{2}$，則 $dv=dx$，並記 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$。於是

$$\int\frac{1}{x^2-x+1}dx=\int\frac{1}{v^2+a^2}dv=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{v}{a}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

所以

$$\begin{aligned}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx &= \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|-\frac{3}{2}\int\frac{1}{x^2-x-1}dx\\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|-\frac{3}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.\end{aligned}$$

2.2 分部積分法 (Integration by Parts)

回顧微分公式

$$(fg)'=f'\cdot g+g'\cdot f.$$

將上式等號兩邊同時積分並由定理 1.4(2) 可得：

$$fg=\int(fg)'dx=\int f'\cdot g\,dx+\int g'\cdot f\,dx=\int g\,df+\int f\,dg+C,$$

或

$$\int fdg=fg-\int gdf.$$

上述公式常用於當 $\int fdg=\int fg'dx$ 不好算但 $\int gdf=\int gf'dx$ 比較易求時，也就是將較難的積分問題轉化成較簡單的問題。此積分手法稱為「分部積分法」。

例 2.10 求 $\int xe^x\,dx.$

解 ：設 $f(x)=x, g(x)=e^x$，則 $f'(x)=1$ 且 $g(x)=e^x$ (這裡我們省略 "+C" 不寫)。利用分部積分法可得

$$\int xe^x\,dx=\int xde^x=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x+C.$$

例 2.11 求 $\int\ln x\,dx.$

解 ： 設 $f(x)=\ln x,\ g'(x)=1$，則 $f'(x)=\frac{1}{x}$ 且 $g(x)=x$。由分部積分法得

$$\int\ln x\,dx=x\ln x-\int xd\ln x=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx=x\ln x-x+C.$$

例 2.12 求 $\displaystyle\int x\sin x\,dx$.

解 ： $\displaystyle\int x\sin x\,dx = -\int x d\cos x = -(x\cos x - \int \cos x\,dx) = -x\cos x + \sin x + C.$

例 2.13 求 $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx$ 。

解 ：
$$\begin{aligned}
\int e^x\cos x\,dx &= \cos x\cdot e^x - \int e^x d\cos x \\
&= e^x\cos x + \int e^x \sin x\,dx \\
&= e^x\cos x + \sin x\cdot e^x - \int e^x d\sin x \\
&= e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx
\end{aligned}$$

所以 $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C.$

2.3 部份分式法 (Partial Fractions)

例 2.8 求 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx.$

解 ：在我們的積分表中並沒有 $\frac{1}{x^2-1}$ 的積分公式，但

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right).$$

所以

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-1}dx &= \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}d(x-1) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}d(x+1) \\
&= \frac{1}{2}\ln(|x-1|) - \frac{1}{2}\ln(|x+1|) + C \\
&= \ln\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} + C.
\end{aligned}$$

在例 2.8 中，主要的步驟是分解

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right).$$

這稱為部份分式法(partial fraction)。一般而言，對於形如

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x^2-3x+4)(x+1)^2}$$

等等有理函數一定可以分解成

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(x-1)(x-2)(x^2-3x+4)(x+1)^2}\\=\quad&\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}+\frac{cx+d}{x^2-3x+4}+\frac{e}{x+1}+\frac{f}{(x+1)^2},\end{aligned}$$

其中 a,b,c,d,e,f 為（待定的）常數。

例 2.9 求 $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

解 ：注意

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1).$$

假設

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

等式兩邊乘以 (x^3+1)，則

$$1=a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)=(a+b)x^2+(b+c-a)x+(a+c).$$

比較係數可得一組聯立方程

$$\begin{cases}a+b=0\\b+c-a=0\\a+c=1\end{cases}$$

由上式求解可得

$$a=\frac{1}{3},b=-\frac{1}{3},c=\frac{2}{3}.$$

因此

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{\frac{1}{3}}{x+1}+\frac{\frac{-1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right),$$

所以

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx.$$

又

$$\int\frac{dx}{x+1}=\int\frac{d(x+1)}{x+1}=\ln|x+1|+C,$$

且第二個積分，在例 2.7 中已經計算出來

$$\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| - \frac{3}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C,$$

故

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^3+1}dx &= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| - \frac{3}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

※練習題※

1. 用變數代換法計算下列不定積分

(a) $\int \sin\frac{t}{2}dt$

(b) $\int \frac{1}{1-x}dx$

(c) $\int (2x-3)^2dx$

(d) $\int \frac{1}{3\sqrt{2-5x}}dx$

(e) $\int \cos x\sin^7 x\,dx$

(f) $\int (3-\frac{x}{3})^8dx$

(g) $\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}}dx$

(h) $\int \frac{x+1}{3\sqrt{3x+1}}dx$

(i) $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}dx$

(j) $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}dx$

2. 用部份分式法計算不定積分

(a) $\int \frac{dx}{(2-x)(2+x)}$

(b) $\int \frac{x^3}{1+x}dx$

(c) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx$

(d) $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx$

(e) $\int \sin^2 2x\,dx$

(f) $\int \frac{1}{4-t^2}dt$

(g) $\int \sin^2\frac{t}{2}dt$

(h) $\int \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$

(i) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} \quad (a>0)$

3. 用分部積分法求下列不定積分

   (a) $\displaystyle\int t^2e^t dt$

   (b) $\displaystyle\int x\cos nx\,dx$

   (c) $\displaystyle\int x^3\ln x\,dx$

   (d) $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx \quad (a\neq 0)$

   (e) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a^2}dx$

4. 其他難題（應該是非常難的！）

   (a) $\displaystyle\int (x+1)\sqrt{x^2-2x+5}dx$

   (b) $\displaystyle\int \sin mx\cos nx\,dx \quad (m\neq n,-n)$

   利用代換 $t=\tan\frac{x}{2}$，因此 $x=2\tan^{-1}t,\ dx=\dfrac{2}{1+t^2}\,dt$，來計算：

   (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$

   (d) $\displaystyle\int \frac{dx}{a\sin x+b\cos x}$

   (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+5\sin x}$

5. 一個非常非常難的題目。

   (a) 求 $\displaystyle\int \sin^{-1}x\,dx$（用分部積分法）

   (b) 推廣這個技巧：用 $\displaystyle\int f(x)dx$ 來表示 $\displaystyle\int f^{-1}(x)dx$

6. 一個你不可能解答的題目。求

   (a) $\displaystyle\int (\ln x)^{-1}dx$

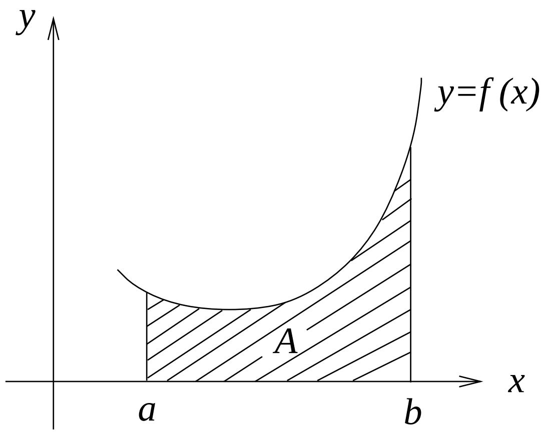
   (b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx$

   這道題目的意義在於告訴你們：並不是所有不定積分都可以（初等函數）解出的！

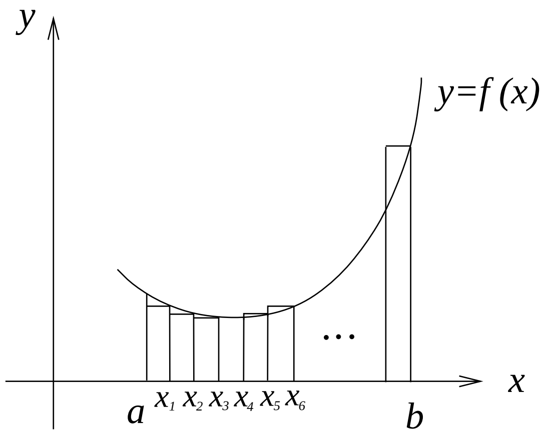
積分學 (三)： 定積分(Definite Integration)

3.1 面積

假設 f 為非負函數，考慮以下圖形面積問題



設 A 為由直線 $x = a$,$x = b$, x 軸及 $y = f(x)$ 所圍成的面積。由於這是個不規則的圖形，所以我們無法用已知的方法求 A。一個合理的近似是以長方形塊估算 A，如下：



將線段 $\overline{ab}$ 等分成 n 小段：

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b，$$

其中每段長

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

且 $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, $x_2 = a + 2\Delta x, \cdots, x_n = a + n\Delta x = b$. 對於每一小段 $[x_{i-1}, x_i]$，以 $f(x_i)$ 為高，作一長方形。此小長方形之面積為

$$A_i = 底 \times 高 = f(x_i) \triangle x$$

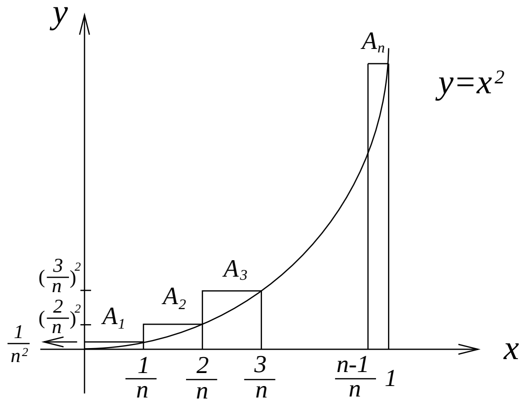
由此，我們得到 A 的一個估計

$$A \approx f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

當 n 很大時，即 Δx 很小時，上述的估計理應很接近 A。若 f 為「連續」函數，則我們定義

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

例 3.1 求由直線 $x = 0$, $x = 1$, x 軸及 $y = x^2$ 所圍成的圖形的面積 A。



解 ：將區間 $[0, 1]$ 分成 n 等分，

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < 1.$$

如圖，作小長方形，其面積為 $A_1 = (\frac{1}{n})^2 \cdot \frac{1}{n}$, $A_2 = (\frac{2}{n})^2 \cdot \frac{1}{n}, \cdots, A_n = (\frac{n}{n})^2 \cdot \frac{1}{n}$。 於是

$$\begin{aligned} A &\approx \sum_{i=1}^{n} A_i \\ &= \sum_{i=1} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

當 $\Delta x = 1/n \to 0$ 時，則 $n \to \infty$。因此由「定義」，

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}\text{。}$$

3.2 微積分基本定理 (The Fundamental Theorem of Calculus)

在上節中，我們定義了面積

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x,$$

其中 f 為連續函數。若 F 是 f 的反導函數， 則 A 會很好算。為了明確起見，我們記

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx,$$

其中 $\int_a^b f(x)dx$ 稱為**被積函數** f 在 $[a,b]$ 區間上(以 b 為**上限**及 a 為**下限**)的**定積分**。

> 定理 3.2（微積分基本定理） 設 $f = F'$，即 F 是 f 的一個反導函數。則
>
> $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

證明 ：令

$$I(t) = \int_a^t f(x)dx \qquad 且 \qquad I(a) = 0.$$

則 $I(b) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ 且

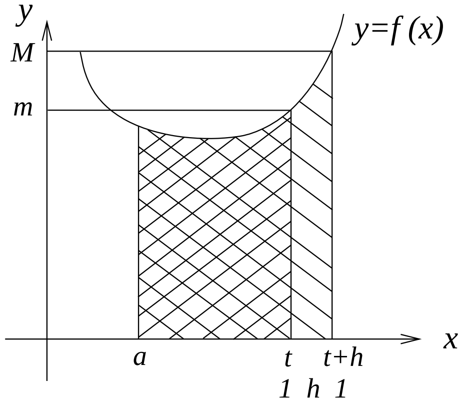
$$I'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{I(t+h) - I(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{t+h} f(x)dx - \int_a^t f(x)dx\right).$$

從下圖可知

$$\int_a^{t+h} f(x)dx - \int_a^t f(x)dx = \int_t^{t+h} f(x)dx,$$

故

$$I'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(x)dx.$$



由於 f 連續，我們可以假定

$$M = \max_{t \le x \le t+h} f(x), \qquad m = \min_{t \le x \le t+h} f(x).$$

於是利用面積的大小關係給出

$$mh \le \int_t^{t+h} f(x)dx \le Mh$$

或

$$m \le \frac{\int_t^{t+h} f(x)dx}{h} \le M$$

再一次利用 f 是連續，可得到

$$\lim_{h \to 0} m = \lim_{h \to 0} M = f(t),$$

於是

$$I'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\int_t^{t+h} f(x)dx}{h} = f(t) = F'(t).$$

所以

$$I'(t) - F'(t) = 0,$$

也就是說

$$I(t) - F(t) = \text{常數}.$$

因此

$$-F(a) = I(a) - F(a) = I(b) - F(b) = \int_b^a f(x)\,dx - F(b).$$

經簡單的代數計算可得

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

請注意，往往我們會將 $f = F'$ 寫成不定積分形式

$$\int f(x)\,dx = F + C.$$

微積分基本定理說明了在形式上，我們將“不定”積分的上, 下限固定為 b, a, 則得到定積分。因此，定積分的計算往往是從計算不定積分開始，最後將上、下限固定下來而完成。

3.3 定積分的計算

例 3.3 再算一次

$$\int_0^1 x^2\,dx.$$

解 ： 由於 $\int x^2\,dx = \dfrac{x^3}{3} + C$， 所以

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3},$$

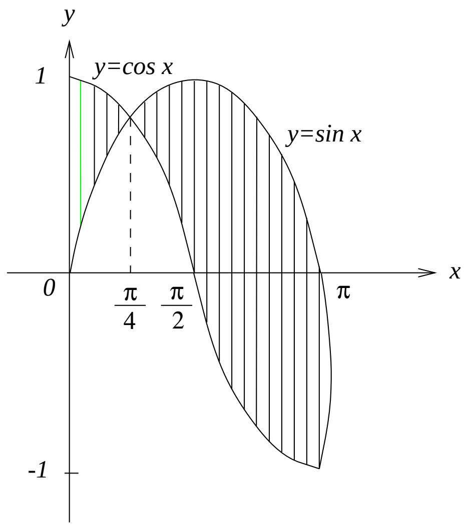
其中我們記

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

例 3.4 計算 $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\,dx.$

解 ： $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}\sqrt{64} - \frac{2}{3}\sqrt{1} = \frac{14}{3}.$

例 3.5 計算由直線 $x = 0, x = \pi$ 及曲線 $y = \cos x$, $y = \sin x$ 所圍成的面積。



解： 如上圖, 所求面積為

$$
\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x)dx \\
= & [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\
= & \sin\frac{\pi}{4} + cos\frac{\pi}{4} - \sin 0 - \cos 0 - \cos\pi - \sin\pi + \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} \\
= & 2\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

注意：由於面積必須是正值，若只計算

$$\int_0^{\pi} (\cos x - \sin x)dx \qquad \text{或} \qquad \int_0^{\pi} (\sin x - \cos x)dx$$

則會給出錯誤的答案。事實上，

$$\text{面積} = \int_0^{\pi} |\cos x - \sin x| dx.$$

不過，要計算上面的積分，最後還是會回到我們的方法來。

例 3.6 計算極限

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right).$$

解： 比較

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \quad \text{與} \quad \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x.$$

則我們會希望

$$f(x_1)\Delta x = \frac{1}{n+1}, f(x_2)\Delta x = \frac{1}{n+2}, \cdots, f(x_n)\Delta x = \frac{1}{2n}.$$

如此，則能以定積分來算出所求之極限。

假設 f 在 $[0,1]$ 上有定義且令 $\Delta x = \frac{1}{n}$，則

$$x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \cdots, x_n = \frac{n}{n} = 1.$$

於是我們需要

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} &= \frac{1}{n+1}, \\
f\left(\frac{2}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} &= \frac{1}{n+2}, \\
&\vdots \\
f\left(\frac{n}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} &= \frac{1}{n+n},
\end{aligned}
$$

或

$$f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{n}{n+i} = \frac{1}{1+(\frac{i}{n})}$$

所以我們可以定

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

由此

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \int_0^1 f(x)dx &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right).\end{aligned}$$

最後這個極限的值是

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,d(1+x) = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2.$$

問：如果不用積分，你能想出甚麼方法去求出這個奇妙的 $\ln 2$？

※練習題※

1. 計算以下定積分：

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos\theta d\theta$

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx$

(d) $\displaystyle\int_1^2 x^3\ln x\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\sin 2x\,dx$

2. 用積分的定義

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

來算

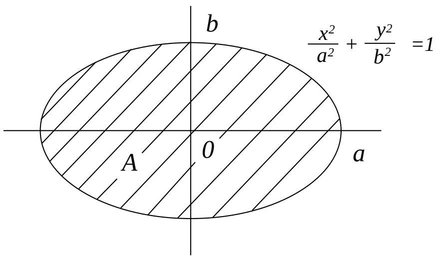
$$\int_0^1 x^3 dx.$$

3. 計算

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx.$$

請繪一圖說明你的答案是那一個圖形的面積。你覺得你做對了嗎？

4. 計算橢圓形面積：



(答案：A $= \pi ab$.)

5. 計算極限：

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right).$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right).$

(提示：先猜出 f 應是甚麼，然後計算 $\int_0^1 f(x)dx$.)