微分學(一)　　極限

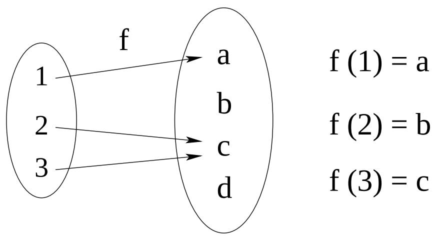
一、函數(function 或mapping)

函數是由一集合到另一集合的對應關係，稱起始集合爲定義域，相對應的集合爲對映域。函數必須將定義域裡的每一個元素對應到對映域裡唯一的元素，也就是說函數必須在定義域裡都"有定義"，而且定義域裡的每一個元素的"函數值"只有一個。我們常用$f:A\to B$ 來表示f 是由A 到B 的一個函數，即A 爲定義域(domain)，B爲對映域(codomain)。若$x\in A$，則以$f(x)$ 表B 中與x 相對應之元素，稱$f(x)$ 爲x 的函數值。函數的表示法常用的有(i)數學陳式；(普遍的陳式爲$y=f(x)$ ，其中x 爲獨立變量，y 爲依賴變量。) (ii)文字敘述；和(iii) 圖形表示。

例1. $f:R\to R \qquad f(x)=2x^2+3$。

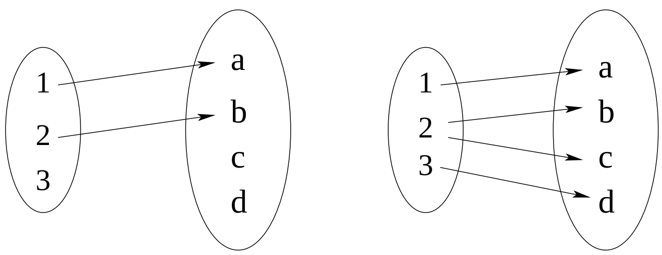
例2. $A=\{\text{班上同學}\}, \qquad R=\{\text{實數}\}, \qquad f:A\to R,$
函數f 是將同學對應到其身高。

例3.



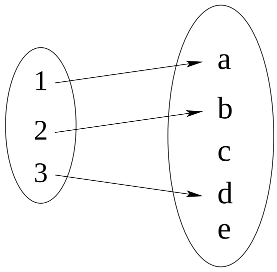
下面的對應關係不是函數。爲什麼？

例4.

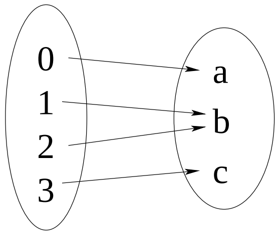


若一函數將定義域中相異的元素對應到對映域中相異的元素，則稱此函數爲一一對應函數(one-one function)，或稱嵌射(injective function)。若對映域中的每一個元素均可在定義域中找到一元素與之相對應，則稱此函數爲映成函數(onto function)，或稱蓋射(surjective function，也有人稱爲滿射)。若函數是一一對應且映成時，則稱爲對射(bijective function)。

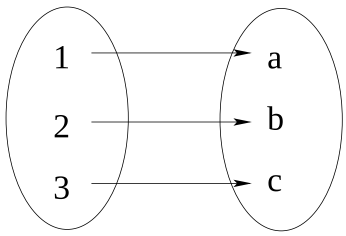
例5. 嵌射



例6. 蓋射



例7. 對射



當我們提及函數時，必須將定義域及對應關係明確指出，至於對映域則較不重要。我們給兩個函數相等的條件是(i)定義域相同(ii) 定義域裡每一個元素的函數值均相同。

例8. $f(x) = x + 2, x \in R$。
$g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, x \in R, x \neq 2$。
這時我們還是說f 與g 不相等。

爲什麼定義域很重要呢？我們看下面的例子。

例9. $f : R^+ \to R, f(x) = x^2 \qquad (R^+ = \{x \in R | x > 0\})$。
$g : R \to R, g(x) = x^2$。
f 是一一對應，g 不是一一對應，但f 與g 有相同的對映域（亦有相同的值域(range)—所有函數值所成的集合）。

由例9可看出考慮不同定義域可能得到性質完全不同的函數。

二、函數的極限

在這一節及以後的討論中，我們將只考慮定義域及對映域均爲實數集合的函數。

當我們討論函數時，常常需要看函數在某一點的附近其函數值的變化情形。例如，我們觀察到一個物理量是跟溫度有關，那麼我們可能問如果把溫度降到絕對零度會是怎麼樣的結果？雖然絕對零度是做不到，但很靠近絕對零度是有可能的，這就是我們現在要，這就是我們現在要探討的題目—函數的極限(limit)。

例10. $f : R \to R, f(x) = x + 2$

當x很靠近2時，$f(x)$ 很靠近4。

定義1. 設函數$f : A \to R$ 且在點a之附近均有定義，b 爲一實數。若對任意A 中之數列$\{x_n\}, x_n \neq a$，且$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 恆有$\lim_{n\to\infty} f(x) = b$ ，則稱函數f 在a 點之極限存在且爲b，並以$\lim_{x\to a} f(x) = b$ 表之。

在此我們必須注意的是

(i) f 在a 附近均有定義，f 在a 有無定義並不影響f 在a 之極限存在與否。

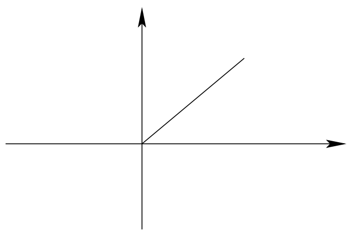
(ii) 我們考慮的數列不可能有等於a 之項。

(iii) b 是實數，(∞ 不是實數，因此極限存在時已排除∞ 的可能)。

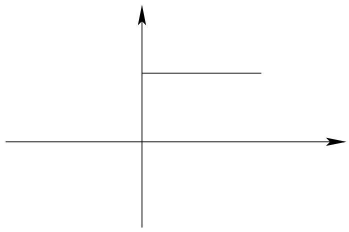
(iv) 對任意收斂到a 的數列$\{x_n\}$，恆有$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$。

我們以例子來說明上述的定義。

例11. $f(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 0 \\ x; & x > 0 \end{cases}$ ，則$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$。



例12. $f(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 0 \\ 1; & x > 0 \end{cases}$ ，則f 在0的極限不存在。



例13. $f(x)=\frac{x}{|x|}, x\neq 0, f$ 在0的極限不存在。

例14. $f(x)=|x|, x\neq 0, f$ 在0的極限爲0。

例15. $f(x)=\begin{cases} 1, & x\text{是無理數} \\ 0, & x\text{是有理數} \end{cases}$，$f$ 在0的極限不存在。

例16. $f(x)=x^n, n$ 爲自然數，$\lim_{x\to a} f(x)=a^n$。

對函數極限的四則運算，我們有如下的定理。

定理1. 設$\lim_{x\to a} f(x)=b, \lim_{x\to a} g(x)=c, k$ 爲任一實數，則

(i) $\lim_{x\to a}[kf(x)+g(x)]=kb+c$。

(ii) $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=b\cdot c$。

(iii) 若$c\neq 0, \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b}{c}$。

例17. 設f 爲一多項式函數，$f(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0$。由例16及定理1可得$\lim_{x\to a} f(x)=c_na^n+c_{n-1}a^{n-1}+\cdots+c_1a+c_0$。

在定理1中我們應特別注意f 與g 之極限均存在之條件下，我們有(i)∼(iii) 的結果，但(i)∼(iii)中任一項成立並不保證f 與g 在之極限均存在。

例18. $f(x)=\begin{cases} -1, & x\leq 0 \\ 1, & x>0, \end{cases}$ $\qquad g(x)=\begin{cases} 1, & x\leq 0 \\ -1, & x>0, \end{cases}$

$\lim_{x\to 0}[f(x)+g(x)]=0$ ，但f 與g 在0之極限均不存在。

在定義1中，若對均小於a 且收斂到a 之數列$\{x_n\}$，（即$x_n\to a$ 且每一$x_n<a$）恆有$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=b$，則稱函數$f$ 在a 點的左極限爲b ，以$\lim_{x\to a^-} f(x)=b$ 表之。反之，若對均大於a 且收斂到a 之數列$\{x_n\}$，（即$x_n\to a$，且每一$x_n>a$），恆有$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=b$，則稱函數$f$ 在a 點之右極限爲b ，以$\lim_{x\to a^+} f(x)=b$ 表之。當然若f 在a 點之極限存在時，則其在a 之左右極限必都存在且相等。反之亦然。

定理2. $\lim_{x\to a} f(x)=b$，若且唯若$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=b$。

例19. $f(x)=\frac{x}{|x|}, x\neq 0, \lim_{x\to 0^-} f(x)=-1, \lim_{x\to 0^+} f(x)=1$，故$\lim_{x\to 0} f(x)$ 不存在。

例20. f 如例12，$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1, \lim_{x\to 0^-} f(x)=0$，因此$\lim_{x\to 0} f(x)$ 不存在。

例21. f 如例11，$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=0=\lim_{n\to 0} f(x)$。

※練習題※

1. 設$f : A \to B, f$ 爲嵌射（一一對應），試問A 與B 是否必有相同個數之元素？

2. 設$f : A \to A, f^n$ 表f 作用n 次，即$f^n(x) = f(f(\cdots f(x)))$，其中$f$ 出現n 次，試證若存在一正整數n 使得對任意$x \in A, f^n(x) = x$，則f 必爲一個對射（一一對應且映成）。

3. $f(x) = x^2 + 3, \lim_{x\to 1} f(x) =?$

4. $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-3}, \lim_{x\to 3} f(x) =?$

5. $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-4}, x \neq 4, \lim_{x\to 4} f(x) =?$

6. $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ x^2+1, & x > 0, \end{cases} \quad \lim_{x\to 0} f(x) =?$

7. $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}, x \neq 1, \lim_{x\to 1} f(x) =?$

8. $f(h) = \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}, a > 0, h \neq 0, \lim_{h\to 0} f(h) =?$

9. $f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \neq 0, \lim_{x\to 0} f(x) =?$

微分學(二)　　連續

如果我們仔細研究第一節中例11及例12之函數圖形，我們會發現兩者有很大的差異。在例11中的函數圖形在$x=0$ 的地方是左右相連的，而在例12中的函數圖形卻在$x=0$ 的地方斷掉了，我們稱例11中的函數在$x=0$ 處是連續的，較明確的定義如下。

定義2. 設函數f 在a 及其附近均有定義，且

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

則稱函數f 在$x=a$ 連續(continuous)。

以上定義說明函數f 必須滿足以下三個條件，才能在$x=a$ 連續：

(i) $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在；

(ii) $f(a)$ 有定義；

(iii) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

因此，例12中的函數f 在$x=0$ 處既然沒有極限，f 在該處不連續。

例22. $f(x)=|x|, f$ 在$x=0$ 連續。

例23. $f(x)=\begin{cases} |x|, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$ 因$f(0)=1\neq \lim_{x\to 0} f(x)$，故$f$ 在$x=0$ 不連續。

例24. $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$，因$f(2)$ 沒有定義，故f 在$x=2$ 不連續。

連續函數的最大特徵是其函數圖形不會斷掉，這也是該名稱的由來。連續函數的四則運算也有如同函數極限的四則運算的定理。

定理2. 設f 與g 均在$x=a$ 連續，k 爲任一實數，則

(i) $kf+g$ 在$x=a$ 連續，

(ii) fg 在$x=a$ 連續，

(iii) 若$g(a)\neq 0$，則$\frac{f}{g}$ 在$x=a$ 連續。

定義3. 如果函數f 在開區間(a,b) 上任何一點都是連續的，則稱f 在(a,b) 上連續。也稱f 是(a,b) 上的連續函數。

例25. 由例17及定理2可知多項式函數均爲$\mathbf{R}$ 上的連續函數。

定義4. 若函數f 滿足以下條件，則稱f 在閉區間$[a,b]$ 上連續：

(i) f 在(a,b) 是連續的

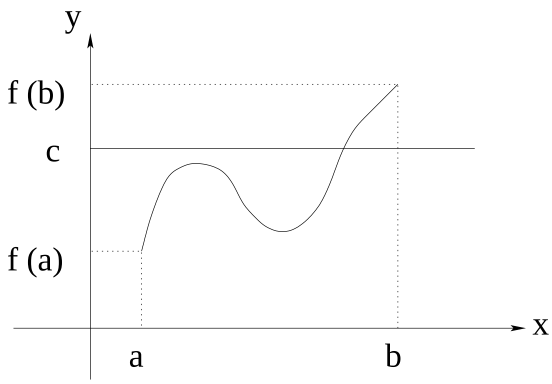
(ii) f 在a 點是從右邊連續的$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

(iii) f 在b 點是從左邊連續的$\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

有界閉區間上之連續函數有很多好處。以下是其中之一個好處。

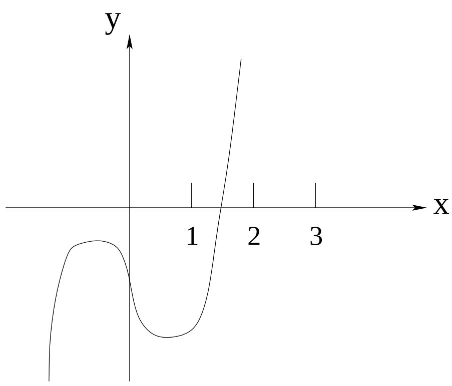
定理3. (中間值定理Intermediate value theorem)

設f 在整個閉區間$[a,b]$ 上連續，且c 是一個介於$f(a)$ 及$f(b)$ 的數，則存在一個$x \in (a,b)$，使得$f(x) = c$。



推論四 (尋根定理)如果f 在$[a,b]$ 是連續的，而且$f(a)f(b) < 0$ ，則最少存在一個$x \in (a,b)$，使得$f(x) = 0$。

例26. 對於$x^3 - x - 1 = 0$，我們無法以分解因式的方法來求解。令$f(x) = x^3 - x - 1$，由於$f(1) = -1, f(2) = 5, f(1)f(2) < 0$ 且$f(x)$ 在$[1,2]$ 是連續的，因此由中間值定理，我們知道，至少有一個解是介於1與2之間，事實上f 的函數圖如下：



※練習題※

1. 若當$x \neq 3, f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ ，則應如何定義$f(3)$ 使f 成爲一個連續函數？

2. 若當$x \neq 0, f(x) = x \sin \frac{1}{x}$，則應如何定義$f(0)$ 使f 成爲一個連續函數。

3. $f(x) = \frac{2x^2+3x+1}{x^2+1}, \lim_{x \to 1} f(x) = ?$

4. 設$f(x) = \begin{cases} 2x^2+1, & x \leq 1 \\ x^3+2, & x > 1 \end{cases}$ ，試問f 是否在$x = 1$ 連續？

5. 設f 與g 有相同之定義域且$f \cdot g$ 在$x = a$ 連續。試問是否f 或g 必在$x = a$ 連續？

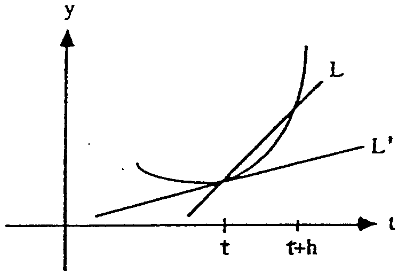
6. 設f 與g 有相同之定義域且$f + g$ 在$x = a$ 連續。試問是否f 或g 必在$x = a$ 連續？

7. 試求方程式$x^4 - x^2 - 1 = 0$ 的根的近似值。

微分學(三)　　微分

一、瞬間改變率

設$f(t)$ 表示某一在直線上運動的物體在時刻爲t 時與直線上某一固定點的距離，在時刻t 與$t+h$ 之間的位移爲$f(t+h)-f(t)$，其平均速度爲$\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$。若$\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ 存在，我們稱該極限爲物體在時刻爲t 時之瞬間速度。



若將函數f 之圖形畫在直角座標系上，可看出連接$(t,f(t))$與$(t+h,f(t+h))$ 之直線L 之斜率爲$\frac{f(t+h)-f(t)}{(t+h)-t}=\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$。若令$h\to 0$ 可發現L 最終會與函數圖形在點$(t,f(t))$ 的切線L 重合。因此若$\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ 存在，可將該極限視爲函數f 之圖形在點$(t,f(t))$ 的切線斜率。

二、導數

考慮一般的函數$y=f(x)$。從以上的討論可以看出$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 是一個常用的量，我們稱之爲函數f 在x 的導數。

定義1. 設函數f 在x 及其附近均有定義，且$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 存在，則稱f 在x 之導數存在或f 在x 處可微(differentiable)，此極限就稱爲f 在x 處之導數(derivative)，以$f'(x)$ 表之，若此極限不存在，則稱f 在x 處不可微。

有關f 在x 處之導數，還有其他等價的符號和定義：

$$f'(x)=\frac{df}{dx}=\frac{dy}{dx}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

例1. $f(x)=c,c$ 是一個實數，則$f'\equiv 0$。

例2. $f(x)=x^2,f'(x)=2x$。

例3. $f(x)=|x|,f$ 在$x=0$ 處不可微分，在0以外之點均可微分。

例4. $f(x)=x^n, n$ 爲整數，$f'(x)=nx^{n-1}$。

（利用二項展開式$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n}b^n$）

設A 爲所有導數存在之點所成的集合，則可在A 上定義一個新的函數$f':x\to f'(x)$ ，這個新的函數即稱爲函數f 的導函數。（f' 之定義域並不一定與f 定義域相同，但恆包含於f 定義域）

定理1. 設f 與g 有共同的定義域且在定義域裡均到處可微分，c 爲一實數

(i) f 與g 必爲連續函數。

(ii) $kf+g$ 可微分且$(kf+g)'=kf'+g'$。

(iii) $f\cdot g$ 爲可微分且$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$。

(iv) 若$g(x)\neq 0$，則$\frac{f}{g}$ 爲可微分且$(\frac{f}{g})'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$。

證明：

(i)

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}[f(x+h)-f(x)] &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot h\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}h\\ &= f'(x)\cdot 0\\ &= 0。\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}(kf+g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{[kf(x+h)+g(x+h)]-[kf(x)+g(x)]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{kf(x+h)-kf(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\\ &= k\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= kf'(x)+g'(x)。\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}(f\cdot g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[g(x+h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\\ &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)。\end{aligned}$$

(iv) 留做練習題。

例5 多項式函數是可微函數。

例6 $f(x) = 3x^3 + 2x + 1, \quad f'(x) = 9x^2 + 2$。

例7 $f(x) = \frac{x^2+2}{x-1}, x \neq 1,$

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2}。$$

例8 $f(x) = (x^3 + 2x + 1)(x^5 + 2x^4 + x^2 + 4)$, 求$f'(0) =?$

$$f'(x) = (3x^2 + 2)(x^5 + 2x^4 + x^2 + 4) + (x^3 + 2x + 1)(5x^4 + 8x^3 + 2x)。$$

因此$f'(0) = 8$。

三、切線

我們定義圓的切線爲平面上與圓交於一點的直線。對於一般圖形，這個定義就很不合適了，比較適用的定義如下：

定義2. 設f 在a 可微分，則f 之圖形在$(a, f(a))$ 之切線(tangent)爲平面上通過$(a, f(a))$ 且斜率爲$f'(a)$ 之直線。

我們不難求出切線的方程式爲

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

由定義2.中可知切線不一定跟函數之圖形只交於一點。

例9 $f(x) = (x^3 + 2x + 1)(x^5 + 2x^4 + x^2 + 4)$ ，求f 之圖形在$(0, 4)$ 的切線方程。

由例8知$f'(0) = 8$ ，切線方程式是 $\quad y - 4 = 8x$。

例10 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ ，f 之圖形在$(1, 5)$ 的切線與f 之圖形交於2點。

與切線垂直的直線稱爲法線(normal)，我們知其斜率與法線斜率爲反倒數，即兩者之積等於-1。

例11 f 如例8，求f 之圖形在$(0, 4)$ 的法線方程式。
$f'(0) = 8$ ，法線方程式是 $\quad y - 4 = -\frac{1}{8}x$。

我們從例3中得知$f(x) = |x|$ 在$x = 0$ 之處不可微分，從函數圖形中發現，f 之圖形在$x = 0$ 處有一個“角”，這告訴我們一個可微分的函數其圖形必須很平滑，不可有“角”的存在，這也是爲什麼我們在畫多項式函數圖形時都畫得很平滑。

四、三角函數的微分

定理2. (i) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
(ii) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

由定理2可推出其他三角函數的導數，同學們應留意其中之規律。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx}(\frac{\sin x}{\cos x}) = \frac{\cos x(\cos x) - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \\
\frac{d}{dx}(\cot x) &= -\csc^2 x \\
\frac{d}{dx}(\sec x) &= \frac{d}{dx}(\frac{1}{\cos x}) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x \\
\frac{d}{dx}(\csc x) &= -\csc x \cot x
\end{aligned}$$

五、連鎖律(chain rule)

定理3. 設$y = f(u)$ 且$u = g(x)$ ，即$y = f(g(x))$，若g 在x 是可微，且f 在$u = g(x)$ 也可微，則$f \circ g(x) = f(g(x))$ 在x 也是可微，且

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

例12 設$f(x) = 4\cos(x^3)$ ，求$f'(x) =?$
令$u = g(x) = x^3, f(u) = 4\cos u,$
則$y = f(g(x))$。
$\therefore \frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x) = [-4\sin(x^3)](3x^2) = -12x^2\sin(x^3)$

例13 設$f(x) = (x^2 - x + 1)^{23}$，求$f'(x) =?$
令$u = g(x) = x^2 - x + 1, f(u) = u^{23},$
$\therefore y = f(g(x))$。
$\frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x) = 23(x^2 - x + 1)^{22}(2x - 1)$

六、隱微分(implicit differentiation)

當方程式無法明顯的以$y = f(x)$ 的形式表示時，我們可以利用隱微分的方法，來求其微分。

例14 試求在圓$x^2 + y^2 = 25$ 通過點$(3, 4)$ 的切線斜率。

等式兩邊皆對x 微分，並設y 是x 的可微分函數，得

$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$。

$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$。因此在點$(3, 4)$ 上，$\frac{dy}{dx}|_{(3,4)} = -\frac{3}{4}$。

例15 若$5y^2 + \sin y = x^2$，求$\frac{dy}{dx} =?$

$10y\frac{dy}{dx} + \cos y(\frac{dy}{dx}) = 2x$。

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{10y+\cos y}$。

微分公式一覽表

1. $\frac{d}{dx}c = 0$
2. $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
3. $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$
4. $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
5. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$
6. $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$
7. $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$
8. $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$
9. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
10. $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$
11. $\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$

※練習題※

1. $f(x)=\frac{1}{x^n}, n$ 爲正整數，試利用二項展開式證明
$$f'(x)=\frac{-n}{x^{n+1}}。$$

2. 試利用定理1(iii)之證明方法，證明定理1(iv)。

3. 試求下列函數之導函數$f(x)$：

   (i) $f(x)=3x+5x^4$ 。

   (ii) $f(x)=\frac{x^2+1}{x^3+1}, x\neq -1$。

   (iii) $f(x)=\sqrt{x}, x>0$ 。

4. $f(x)=(x^3+2x^2+1)(x^2+3x+2)$，求$f$ 之圖形在$(0,2)$ 之切線及法線方程式。

5. $f(x)=\begin{cases} x, & x\leq 0 \\ x^2 & x>0 \end{cases}$，試證$f$ 在0處不可微。

6. $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leq 0 \\ x^3, & x>0 \end{cases}$，試證$f$ 在0處可微。

7. $f(x)=(x^2+x)^{10}$，求$f'(x)$。

8. 試求下列函數的導函數$\frac{dy}{dx}$：

   (i) $y=\frac{3}{\sqrt{x}+2}$

   (ii) $y=\frac{4x+1}{x^2-5}$

   (iii) $y=\frac{\cos x}{x\sin x}$

   (iv) $y=\sin(\frac{1}{x^2})$

   (v) $y=(x^3-7x)^{-2}$

   (vi) $y=\tan x\sec x$。

9. 設函數$y=f(x)$ 滿足方程$\sqrt{x}+\sqrt{y}=8$，試利用隱微分法求$\frac{dy}{dx}$。

微分學(四)　微分的應用

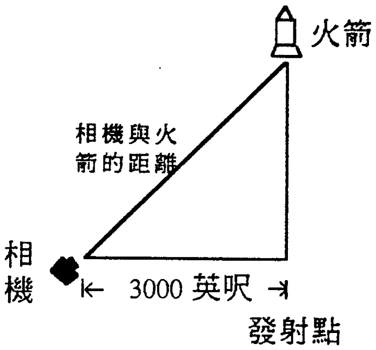
微分學的應用相當廣泛。茲舉以下四個方向作爲主要的應用。

一、相對速率(related rates)

已知y 與x 的關係及x 對t 的相對速率，欲求y 對t 的相對速率。

$$\begin{tikzcd} y \arrow[rr] \arrow[dr] & & t \\ & x \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

例1 假設一架火箭在4000呎高空時正以880呎／秒的速度往上衝（見下圖），求相機與火箭的距離在那瞬間的改變。



解　：令

$t =$ 從火箭發射後的秒數；

$y =$ 在t 秒後，相機與火箭的距離（以呎計）；

$x =$ 在t 秒後，火箭的高度（以呎計）；

欲求$\frac{dy}{dt}|_{x=4000}$。

$\because y^2 = x^2 + (3000)^2$

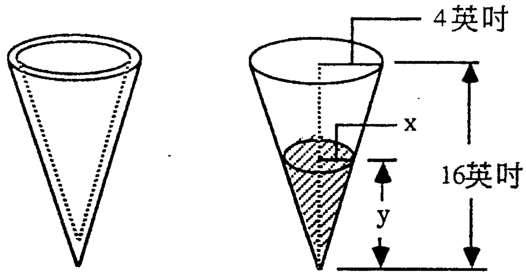
利用隱微分　$2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$

$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$

當$x = 4000, \frac{dx}{dt} = 880, y = 5000$

$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{4}{5}(880) = 704$ 呎／秒。

例2 將一種液體倒入一個圓椎體的過濾器來去除這液體中的雜質，（見下圖），假設這圓椎體的高度是16吋，其底邊半徑是4吋。如果當液體的高度是8吋時這液體正以2（吋）^{3} ／分的速度通過這個圓椎體的過濾器，試問此間該液體的高度正以多快的速度來減少？



裝過濾器的漏斗

解 ：令

$t =$ 從開始觀察的那一刻算起的時間（以分計）；

$V =$ 在t 分鐘時，液體在圓椎體內的體積（吋）^{2}；

$y =$ 在t 分鐘時，液體在圓椎體內的高度（吋）；

$x =$ 在t 分鐘時，液體表面的半徑（以吋計）。

欲求$\frac{dy}{dx}|_{y=8} =?$

$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$ 和 $\frac{dy}{dx}|_{y=8} = -2$；

同時$\frac{4}{x} = \frac{16}{y}$, 故$x = \frac{1}{4}y$, 而$V = \frac{1}{48}\pi y^3$。

$\frac{dV}{dx} = \frac{1}{16}\pi y^2 \frac{dy}{dx}$ 。

當$y = 8$ 時，

$-2 = \frac{1}{16}\pi(8)^2(\frac{dy}{dx})|_{y=8}$

所以$\frac{dy}{dx}|_{y=8} = -\frac{1}{2\pi} \approx -0.16$ 吋／分。

二、遞增與遞減的區間

定義1 令f 是一個在某一區間有定義的函數，而x_1 與x_2 是在這區間中的兩點。

(i) 如果當$x_1 < x_2$，則$f(x_1) < f(x_2)$，f 在這區間上就是遞增的(increasing)。

(ii) 如果當$x_1 < x_2$，則$f(x_1) > f(x_2)$，f 在這區間上就是遞減的(decreasing)。

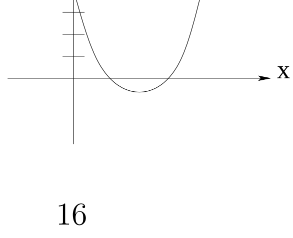
定理1 設f 是一個在閉區間$[a, b]$ 上連續且在開區間(a, b) 上可微的函數。

(i) 若對所有的$x \in (a, b), f'(x) > 0$，則f 在$[a, b]$ 上是遞增的。

(ii) 若對所有的$x \in (a, b), f'(x) < 0$，則f 在$[a, b]$ 上是遞減的。

(iii) 若對所有的$x \in (a, b), f'(x) = 0$，則f 在$[a, b]$ 上是常數。

例3 令$f(x) = x^2 - 4x + 3$ ，找其遞增與遞減的區間。

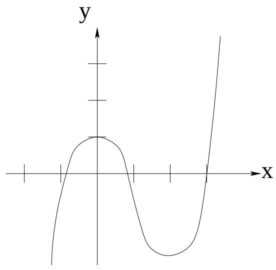


解 ：$f'(x) = 2x - 4 = 2(x-2)$

(i) 當$-\infty < x < 2$ 時，$f'(x) < 0$，所以f 在$(-\infty, 2]$ 是遞增的。

(ii) 當$2 < x < +\infty$ 時，$f'(x) > 0$，所以f 在$[2, \infty)$ 是遞減的。

例4 令$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$，找其遞增與遞減的區間。



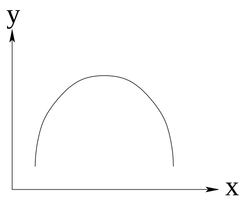
解 ：$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

(i) 當$-\infty < x < 0$ 時，$f'(x) > 0$，故f 在$[-\infty, 0]$ 是遞增的。

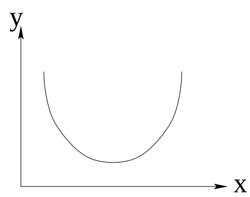
(ii) 當$0 < x < 2$ 時，$f'(x) < 0$，故f 在$[0, 2]$ 是遞減的。

(iii) 當$2 < x < \infty$ 時，$f'(x) > 0$，故f 在$[2, \infty)$ 是遞減的。

三、凹狀(concavity)



向下凹



向上凹

定義2 設f 在一個區間上可微。

(i) 如果f' 在區間上是遞增的，則稱f 在這區間上是凹口向上(concave upward)。

(ii) 如果f' 在區間上是遞減的，則稱f 在這區間上是凹口向下(concave downward)。

定理2 (i) 如果在開區間(a, b) 上，$f''(x) > 0$，則f 在(a, b) 上是凹口向上。

(ii) 如果在開區間(a, b) 上，$f''(x) < 0$，則f 在(a, b) 上是凹口向下。

註：$f''(x)$ 是$f'(x)$ 對x 的微分，稱$f(x)$ 對x 的二次導數(second order derivative)。

例5 令$f(x) = x^2 - 4x + 3$，找$f(x)$ 凹口向上或向下的開區間。

解 ：$f'(x) = 2x - 4$

$f''(x) = 2 > 0, \forall x$ 因此$f(x)$ 在$(-\infty, \infty)$ 都是凹口向上。

例6 令$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$，找其凹口向上及凹口向下的開區間。

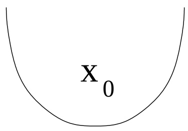
解 ：$f'(x) = 3x^2 - 6x$。

$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$。

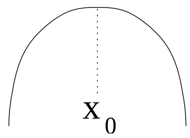
設$f(x)$ 在$(-\infty, 1)$ 上凹口向下，在$(1, \infty)$ 上凹口向上。

註 ：$\because f''(1) = 0$ 並且在x 經過1時有變號的行爲，我們稱點$(1, f(1)) = (1, -1)$ 爲$f(x)$ 的拐點（反曲點point of inflection）。

四、函數的相對極大、極小值(relative maximal and minimal values)



相對極小值

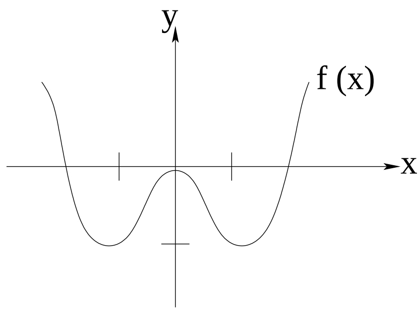


相對極大值

$$\begin{cases} f'(x) < 0, & \forall x < x_0 \\ f'(x) > 0, & \forall x > x_0 \\ f'(x) = 0, & x = x_0 \end{cases}$$
或$f''(x_0) > 0$

$$\begin{cases} f'(x) > 0, & \forall x < x_0 \\ f'(x) < 0, & \forall x > x_0 \\ f'(x) = 0, & x = x_0 \end{cases}$$
或$f''(x_0) < 0$

例7 $f(x) = x^4 - 2x^2$

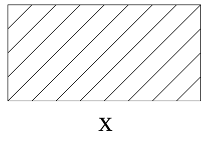


$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$。

$f''(x) = 12x^2 - 4$。

令$f'(x) = 0$，得$x = 0, 1, -1$。因$f''(0) = -4 < 0, f$ 在$x = 0$ 處有一個相對極大值。又因$f''(1) = 8 > 0, f$ 在$x = 1$ 處有一個相對極小值。另外$f''(-1) = 8 > 0, f$ 在$x = -1$ 處也是有一個相對極小值。

例8 假設一個長方形的周長是100公尺，如何假定此長方形的長與寬，使其面積爲最大。



解 ：令

$x=$ 長方形的長（以公尺計）；

$y=$ 長方形的寬（以公尺計）；

$A=$ 長方形的面積（公尺）^{2}。

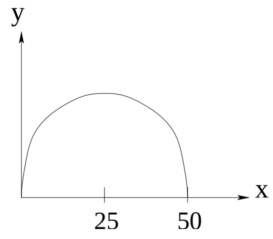
明顯$A=xy$，但已知$2x+2y=100$。

所以$A=x(50-x)=50x-x^2, 0\leq x\leq 50$。

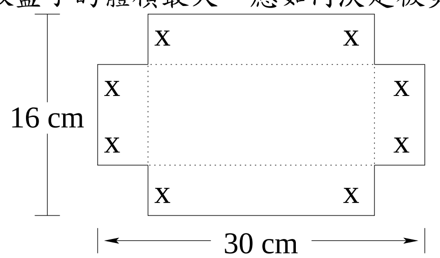
令$\frac{dA}{dx}=50-2x=0$ 得$x=25$。而且

$\frac{d^2A}{dx^2}|_{x=25}=-2<0$。

因此，若$x=y=25$，（亦即形狀是一正方形時），則A 有最大值。



例9 將一個長方形硬紙板(30公分 $\times$ 16公分) 的四角各剪去大小相同的正方形來做一個無蓋的盒子（見下圖），如果想使得所做盒子的體積最大，應如何決定被剪去正方形的大小？



解 ：令

$x=$ 正方形的邊長；

$V=$ 盒子的體積。

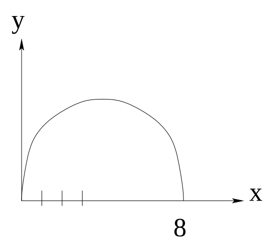
當$0\leq x\leq 8$ 時，$V=(16-2x)(30-2x)x=480x-92x^2+4x^3$ 。

因此$\frac{dV}{dx}=480-184x+12x^2=4(3x^2-46x+120)=4(x-12)(3x-10)$

令$\frac{dV}{dx}=0$，則得$x=12$ （不可能）或$x=\frac{10}{3}$。

此外，$\frac{d^2V}{dx^2}=-184+24x$，因此$\frac{d^2V}{dx^2}|_{x=\frac{10}{3}}<0$。

我們結論出，當$x=\frac{10}{3}$ 時V 有最大值。



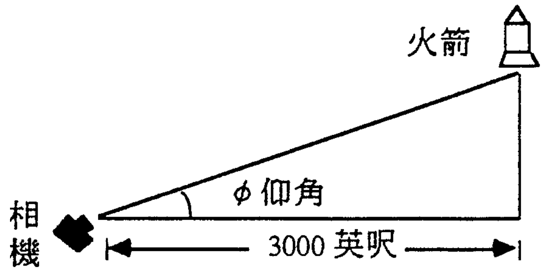
參考書目

(1) 郭滄海，劉松田，鄭國順，“微積分”，凡異。

(2) R.Johnson,F.Kiokemeister,E.Wolk,“Calculus with Analytic Geometry”, Sixth ed.,Allyn & Bacon.

※練習題※

1. 假設一架火箭在4000呎高空時，正以880呎／秒的速度往上衝(見下圖)，試問在這瞬間，在地上的相機必須以多快的速度來改變其對火箭的仰角才能使火箭仍保持在它的視線範圍？



2. 找下列函數的(a)遞增區間(b)遞減區間(c)向上凹的開區間(d)向下凹的開區間(e)反曲點
   (i) $f(x) = 3x^3 - 4x + 3$
   (ii) $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$

3. 證明，當$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 時，$x < \tan x$(提示：先證$f(x) = x - \tan x$ 在$[0, \frac{\pi}{2})$ 上是遞減的)。

4. 下列函數何時有相對極大點及相對極小點？試繪該函數之圖形
   (i) $f(x) = x^4 - 6x^2 - 3$
   (ii) $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$

5. 假設有一個油井座落於海底W點(見下圖)的位置，此W點距離岸上A點(以W點與海岸的最近點)的距離是5公里，我們想要抽取石油送到岸上的B點，已知A點與B點的距離是8公里及在海底埋油管的費用是每公里$100,000 元，在陸地上埋油管的費用是每公里$7,500元，應如何決定岸上P點(介於A點與B點之間)的位置使得埋油管的費用爲最低。