

承辦單位：國立中山大學應用數學系

答案：

$$1. \underline{a = 1, b = -2} \quad 2. \underline{2} \quad 3. \underline{64} \quad 4. \underline{184} \quad 5. \underline{2}$$

$$6. \underline{\frac{1}{2}} \quad 7. \underline{17} \quad 8. \underline{5} \quad 9. \underline{28} \quad 10. \underline{2}$$

注意事項：

1. 本試卷共 10 題計算題，每一題 10 分。
2. 考試時間： 10:00~12:00。
3. 請將詳細步驟書寫於題目下方空白處，答案必須化簡並書寫於上方指定處。
4. 請將學校、姓名及報名編號寫在頁尾指定處。

1. 若  $a, b$  是整數，且  $x^2 - x - 1$  為  $ax^3 + bx^2 + 1$  的一個因式，試求  $a, b$  之值。  $a = 1, b = -2$

解答：【解法一】 由長除法可知， $ax^3 + bx^2 + 1$  除以  $x^2 - x - 1$  的商式為  $ax + (a + b)$ ，餘式為  $(2a + b)x + (a + b + 1)$ ，但因為  $x^2 - x - 1$  是  $ax^3 + bx^2 + 1$  的因式，所以餘式為 0，換言之，

$$\begin{aligned} 2a + b &= 0 \\ a + b &= -1 \end{aligned}$$

故  $a = 1, b = -2$ 。

【解法二】 因為  $x^2 - x - 1$  是  $ax^3 + bx^2 + 1$  的因式，由此可判斷出商式為一次式且  $x$  的係數為  $a$ ，則令商式為  $ax + k$ ，再因  $ax^3 + bx^2 + 1$  的常數為 1，可知除式的常數  $-1$  與商式的常數  $k$  相乘必須為 1，因此  $k = -1$ ，商式為  $ax - 1$ 。寫成因式分解的形式，再比較係數，

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + 1 &= (ax - 1)(x^2 - x - 1) \\ &= ax^3 + (-a - 1)x^2 + (1 - a)x + 1 \end{aligned}$$

可得

$$b = -a - 1, \quad 0 = 1 - a$$

故  $a = 1$  和  $b = -2$ 。 □

2. 若  $60^a = 3, 60^b = 5$ ，試求  $12^{[(1-a-b)/2(1-b)]}$  之值。 2

解答：  $12 = 60/5 = 60/60^b = 60^{1-b}$ ，所以

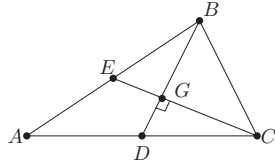
$$\begin{aligned} 12^{[(1-a-b)/2(1-b)]} &= [60^{1-b}]^{(1-a-b)/2(1-b)} \\ &= 60^{(1-a-b)/2} = \sqrt{\frac{60}{60^a 60^b}} \\ &= \sqrt{\frac{60}{3 \cdot 5}} = 2 \quad \square \end{aligned}$$

學校：

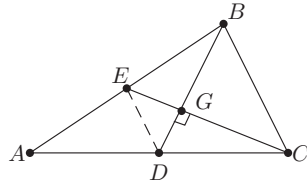
姓名：

編號：

3. 如下圖， $\overline{BD}$  與  $\overline{CE}$  為  $\triangle ABC$  之中線，且  $\overline{BD} \perp \overline{CE}$ ， $\overline{BD} = 8$ ， $\overline{CE} = 12$ ，求  $\triangle ABC$  的面積。 64



解答：連接  $\overline{ED}$



因為  $\overline{BD} \perp \overline{CE}$ ，所以

$$\text{四邊形 } BCDE \text{ 面積} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CE} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 = 48$$

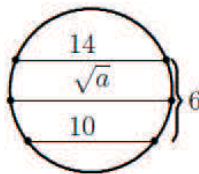
又因為  $\overline{BD}$ ， $\overline{CE}$  分別為  $\triangle ABC$  的兩中線，則交點  $G$  即為重心，因此

$$\triangle ADE = \frac{1}{4}(\triangle ABC) = \frac{1}{3}(\text{四邊形 } BCDE \text{ 面積})$$

因此

$$\triangle ABC = \frac{4}{3} \cdot \text{四邊形 } BCDE \text{ 面積} = \frac{4}{3} \cdot 48 = 64 \quad \square$$

4. 下圖中，圓內兩平行弦之弦長分別為 10 與 14，且相距 6，若平行此兩弦且與此兩弦等距之弦長為  $\sqrt{a}$ ，試求  $a$  之值。 184



解答：【解法一】 令  $x$  為圓心  $O$  到弦長為 10 的距離，而  $y$  為  $O$  到弦長為 14 的距離。令  $r$  為半徑，則

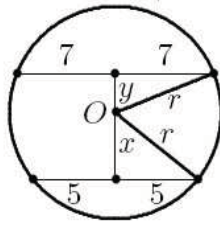
$$x^2 + 25 = r^2$$

$$y^2 + 49 = r^2$$

$$\text{所以 } x^2 + 25 = y^2 + 49$$

$$\text{因此 } x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 24$$

若兩條弦在圓心的同一邊，則  $x - y = 6$ ，若不同邊，則  $x + y = 6$ ，但若  $x - y = 6$ ，可知  $x + y = 4$ ，矛盾，所以  $x + y = 6$ ，因此  $x - y = 4$ ，可解得  $x = 5$  和  $y = 1$ 。因此， $r^2 = 50$ ，所以平行兩弦中間的弦距圓心 2。令此弦長  $2d$ ，則  $d^2 + 4 = 50$ ， $d^2 = 46$ ，且  $a = (2d)^2 = 184$ 。



【解法二】 垂直弦長為  $\sqrt{a}$  的直徑被分為  $c$  和  $d$  的長度，則

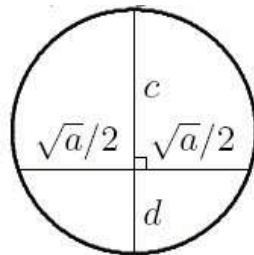
$$cd = \left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^2 = \frac{a}{4}$$

若將弦上移及下移 3 單位長，可得

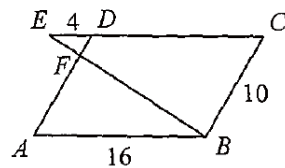
$$(c-3)(d+3) = \left(\frac{14}{2}\right)^2 \quad (1)$$

$$(c+3)(d-3) = \left(\frac{10}{2}\right)^2 \quad (2)$$

(1) 加 (2) 可得  $2cd - 18 = 49 + 25 = 74$ ，因此  $2cd = 92$ ，所以  $a = 4cd = 184$ 。  
□



5. 如下圖，平行四邊形  $ABCD$  中， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $\overline{AB} = 16$ ， $\overline{BC} = 10$ ，延長  $\overline{CD}$  至  $E$ ，使得  $\overline{DE} = 4$ ，若  $\overline{BE}$  交  $\overline{AD}$  於  $F$ ，求  $\overline{DF}$  的長度。 2



解答：【解法一】 因為  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，所以  $\triangle FDE$  相似於  $\triangle BCE$ ，因此

$$\frac{\overline{FD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{CE}} \text{ 或 } \overline{FD} = \frac{\overline{DE}}{\overline{CE}} \cdot \overline{BC} = \frac{4}{4+16} \cdot 10 = 2$$

【解法二】 因為  $\angle BFA = \angle EFD$  且  $\angle FAB = \angle FDE$ ，所以  $\triangle FAB$  相似於  $\triangle FDE$ ，因此

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} \text{ 或 } \overline{FA} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{FD}}{\overline{DE}} = \frac{16}{4} \overline{FD}$$

又由於  $\overline{FA} + \overline{FD} = \overline{AD} = \overline{BC} = 10$ ，則  $4\overline{FD} + \overline{FD} = 10$ ，故  $\overline{FD} = 2$ 。 □

6. 隨機取出 60 的一個正因數，試求取出此正因數會小於 7 的機率。 1/2

解答：因為  $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ ，共有  $(2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 12$  個正因數，其中有

$$1, 2, 3, 4, 5, 6$$

共 6 個正因數會小於 7，故所求機率為  $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ 。 □

7. 將 1998 分解成二個正整數相乘，求此二個正整數相差的最小值。 17

解答：質因數分解  $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$ ，分成兩個正整數的乘積，共有八種組合：

$$\begin{aligned} 1998 &= 1 \times 1998 = 2 \times 999 \\ &= 3 \times 666 = 6 \times 333 \\ &= 9 \times 222 = 18 \times 111 \\ &= 27 \times 74 = 37 \times 54 \end{aligned}$$

兩數之差的最小值為  $54 - 37 = 17$ 。 □

8. 設  $x$  的三進位表示法是 12112211122211112222，試求  $x$  的九進位表示法的第一位（從左邊算起）數字。 5

解答：將  $x$  的 3 進位成對表示，改寫式子為，

$$\begin{aligned} x &= (1 \cdot 3^{19} + 2 \cdot 3^{18}) + (1 \cdot 3^{17} + 2 \cdot 3^{16}) + \cdots + (2 \cdot 3 + 2) \\ &= (1 \cdot 3 + 2)(3^2)^9 + (1 \cdot 3 + 1)(3^2)^8 + \cdots + (2 \cdot 3 + 2) \end{aligned}$$

所以  $x$  的 9 進位，第一個數字為  $1 \cdot 3 + 2 = 5$ 。 □

9. 一個實數的等比數列，前兩項的和是 7，前六項的和是 91，試求前四項的和。 28

解答：令  $a$  和  $r$  為此等比級數首項及公比，則

$$a + ar = 7 \tag{3}$$

$$\frac{a(r^6 - 1)}{r - 1} = 91 \tag{4}$$

將上面的 (4) 除以 (3) 可得到

$$\frac{a(r^6 - 1)}{(r - 1)a(r + 1)} = \frac{91}{7} = 13$$

化簡後，

$$\frac{(r^2 - 1)(r^4 + r^2 + 1)}{r^2 - 1} = r^4 + r^2 + 1$$

所以，

$$\begin{aligned} r^4 + r^2 + 1 &= 13 \\ (r^2 + 4)(r^2 - 3) &= 0 \end{aligned}$$

因此  $r^2 = 3$ ，且

$$\begin{aligned} a + ar + ar^2 + ar^3 &= (a + ar)(1 + r^2) \\ &= 7(4) = 28 \end{aligned} \quad \square$$

10. 定義  $[a, b, c] = \frac{a+b}{c}$ ，其中  $c \neq 0$ ，試求  $[[60, 30, 90], [2, 1, 3], [10, 5, 15]]$ 。 2

解答：由題意可知，

$$\begin{aligned} [60, 30, 90] &= \frac{60 + 30}{90} = 1 \\ [2, 1, 3] &= \frac{1 + 2}{3} = 1 \\ [10, 5, 15] &= \frac{10 + 5}{15} = 1 \end{aligned}$$

則

$$[[60, 30, 90], [2, 1, 3], [10, 5, 15]] = [1, 1, 1] = \frac{1 + 1}{1} = 2 \quad \square$$

~全卷完~