學系：＿＿＿＿＿＿＿＿學號：＿＿＿＿＿＿＿＿姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿

注意：禁止使用計算器。

問題	1: 10分	2: 10分	3: 10分	4: 10分	5: 10分	總分: 100分
得分						
問題	6: 10分	7: 10分	8: 10分	9: 10分	10: 10分	
得分						

1. 設 $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } x \text{ 爲有理數} \\ 1, & \text{如果 } x \text{ 爲無理數} \end{cases}$ 和 $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } x \text{ 爲有理數} \\ x, & \text{如果 } x \text{ 爲無理數} \end{cases}$，求 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 和 $\lim_{x\to 0} g(x)$。 不存在; 0

解答: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } x \text{ 爲有理數} \\ 1, & \text{如果 } x \text{ 爲無理數} \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } x \text{ 爲有理數} \\ x, & \text{如果 } x \text{ 爲無理數.} \end{cases}$

不論 x 多接近 0，仍會有無限多個有理數和無理數，所以 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 不存在。

當 x 接近 0，函數的二個部份都接近 0，所以 $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$。 □

2. 設 f 爲可微的函數且 $f'(c) = 3$，求 $f'(-c)$ 如果

(a) f 爲奇函數 3

(b) f 爲偶函數 -3

解答: (a) 如果 $f'(c) = 3$ 和 f 爲奇函數，則 f' 爲偶函數，那麼 $f'(-c) = f'(c) = 3$。

(b) 如果 $f'(c) = 3$ 和 f 爲偶函數，則 f' 爲奇函數，那麼 $f'(-c) = -f'(c) = -3$。 □

3. 對於所有實數 x，求 $|\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \sec x + \csc x|$ 的最小值。 $2\sqrt{2} - 1$

解答: 末四項可以改寫成

$$\begin{aligned} \tan x + \cot x + \sec x + \csc x &= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} \\ &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x + \cos x}{\sin x \cos x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1+\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}\left(\frac{\sin x+\cos x-1}{\sin x+\cos x-1}\right)\\
&= \frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\sin x\cos x(\sin x+\cos x-1)}\\
&= \frac{2\sin x\cos x}{\sin x\cos x(\sin x+\cos x-1)}\\
&= \frac{2}{\sin x+\cos x-1}
\end{aligned}$$

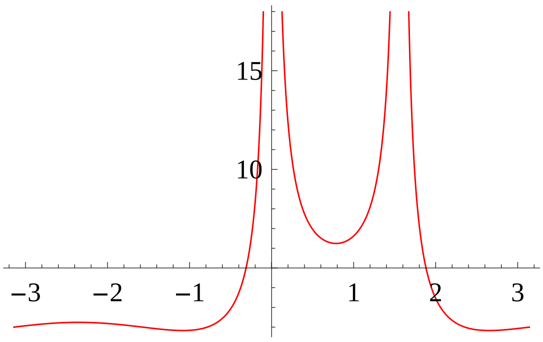
令 $t=\sin x+\cos x-1$，則絕對值內的表達式爲

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sin x+\cos x+\frac{2}{\sin x+\cos x-1}\\
&= (\sin x+\cos x-1)+1+\frac{2}{\sin x+\cos x-1}=t+1+\frac{2}{t}
\end{aligned}$$

因爲 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)$, $\sin x+\cos x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ 和 $t=\sin x+\cos x-1\in[-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2}]$。

$$\begin{aligned}
f'(t) &= 1-\frac{2}{t^2}=\frac{t^2-2}{t^2}=\frac{(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})}{t^2}\\
f(-1+\sqrt{2}) &= -1+\sqrt{2}+1+\frac{2}{-1+\sqrt{2}}\\
&= \sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{2}-1}\\
&= \frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\right)=2+3\sqrt{2}
\end{aligned}$$

對於 $t>0$, f 是遞減，而且 $f(t)>f(-1+\sqrt{2})=2+3\sqrt{2}$。對於 $t<0$, f 在 $(-\sqrt{2}-1,-\sqrt{2})$ 爲遞增，在 $(-\sqrt{2},0)$爲遞減。所以 $f(t)<f(-\sqrt{2})=1-2\sqrt{2}$。最後，$|f(t)|\geq 2\sqrt{2}-1$。如下圖： □



【註】 或用算幾不等式可得

$$
\begin{aligned}
t+\frac{2}{t} &\geq 2\sqrt{2} \quad \text{當 } t>0 \\
t+\frac{2}{t} &\leq -2\sqrt{2} \quad \text{當 } t<0
\end{aligned}
$$

4. 證明所有有三個相異實根的三次函數，存在一個反曲點且該點 x 的坐標爲三個根的平均值。

解答: 設 f 的根都是實數，將函數展開成 $f(x)=a(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$ 其中 r_1, r_2 和 r_3 爲 f 的相異根。從有三個因式的函數的乘法原理，會有

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= a[(x-r_1)(x-r_2)+(x-r_1)(x-r_3)+(x-r_2)(x-r_3)] \\
f''(x) &= a[(x-r_1)+(x-r_2)+(x-r_1)+(x-r_3)+(x-r_2)+(x-r_3)] \\
&= a[6x-2(r_1+r_2+r_3)]
\end{aligned}
$$

當 $x=\frac{r_1+r_2+r_3}{3}=($ r_1, r_2 和 r_3 的平均$)$時，則 $f''(x)=0$。最後當 $x<\frac{r_1+r_2+r_3}{3}$ 和當 $x>\frac{r_1+r_2+r_3}{3}$ 時 $f''(x)$ 爲異號，亦即函數的圖形在 $\frac{r_1+r_2+r_3}{3}$ 的兩側爲一凸和一凹，因此 $\left(\frac{r_1+r_2+r_3}{3}, f\left(\frac{r_1+r_2+r_3}{3}\right)\right)$ 爲反曲點。 □

5. 設 $F(x)=\int_0^{x^2}\sin\theta^2\,\mathrm{d}\theta$，求 $F'(x)$。 $2x\sin x^4$

解答: 使用來布尼茲積分法則：設 $F(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ 是可微函數，則

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= f(x,b(x))b'(x)-f(x,a(x))a'(x)+\int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sin\left(x^2\right)^2(2x)=2x\sin x^4
\end{aligned}
$$

□

6. 求 $\lim_{n\to\infty}(\cos\frac{1}{n})^n$。 1

解答: 令 $y=f(x)=(\cos x)^{\frac{1}{x}}, x\geq 0$，則 $\lim_{n\to\infty}(\cos\frac{1}{n})^n=\lim_{x\to 0^+}f(x)$。

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\ln f(x) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cos x}{x} && \text{(分子分母同時趨近 0)} \\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{1} && \text{(羅必達法則)} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

所以 $\lim_{x\to 0^+}f(x)=e^0=1$。 □

7. 判斷下列瑕積分收斂或發散： 收斂

$$\int_e^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

解答: (下列第一式分子分母同時趨近 ∞) 用羅必達法則得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x\to\infty} 2\frac{\sqrt{x}}{x} = 0$$

又

$$\int_M^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x \le \int_M^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{當 } M \text{ 夠大}$$

$\int_M^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_M^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$ 收斂，所以 $\int_e^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 也收斂。 □

8. 求曲線 $y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 在 $-1 \le x \le 1$ 之間的弧長。 $e - e^{-1}$

解答: 令 $x = t$ 及 $y(t) = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$，則

$$\begin{aligned}
\text{弧長} &= \int_{-1}^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^1 \sqrt{\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^1 \frac{e^t + e^{-t}}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{e^t - e^{-t}}{2}\Bigg|_{t=-1}^{t=1} = e - e^{-1}
\end{aligned}$$

□

9. 令 $F(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$，

(a) 找一點 a 使得 $F(a) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{2k+2}$。 1 或 -1

(b) 求 $\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{2k+2}$ 之值。 $\frac{1}{2}\ln 2$

解答:

(a) 因爲$\frac{t}{1+t^2} = t\sum_{k=0}^{\infty}(-t^2)^k$，

$$F(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty}\int t(-t^2)^k\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+2}x^{2k+2}$$

所以

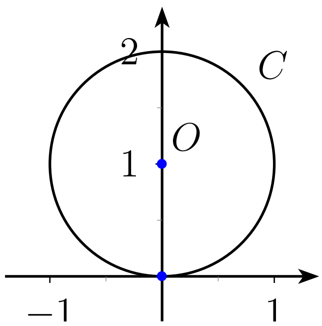
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+2} = F(1) \text{ 或 } F(-1)$$

(b)

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+2} = F(1) = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2}\ln 2 \quad \square$$

10. 設曲線 C 的極座標方程式爲 $r = 2\sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$，求 C 所圍區域繞 x-軸旋轉所得旋轉體的體積。 $2\pi^2$

解答: 【**解法一**】 由 $r = 2\sin\theta$，可得 $r^2 = 2r\sin\theta$，亦即 $x^2+y^2 = 2y$，如下圖：



前式可表爲 $x^2+(y-1)^2 = 1$ 或 $y = 1 \pm \sqrt{1-x^2}$，所得旋轉體體積爲

$$\pi\int_{-1}^{1}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2 - \left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^2\,\mathrm{d}x = 4\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

令 $x = \sin u$，則有

$$\begin{aligned}4\pi\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 u}\cos u\,\mathrm{d}u &= 4\pi\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\,\mathrm{d}u\\ &= 4\pi\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2u}{2}\,\mathrm{d}u\\ &= 2\pi^2\end{aligned}$$

【解法二】 曲線 C 為一圓，其面積是 $A=\pi$、圓心是 $(0,1)$，繞 x-軸旋轉一圈其周長為 $2\pi r=2\pi$，由 Theorem of Pappus 得旋轉體體積為 $A\times(2\pi r)=\pi\times(2\pi)=2\pi^2$。 $\square$