學系：________________學號：________________姓名：________________

注意：禁止使用計算器。

問題	1: 10分	2: 10分	3: 10分	4: 10分	5: 10分	總分: 100分
得分						
問題	6: 10分	7: 10分	8: 10分	9: 10分	10: 10分	
得分						

1. 計算 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-x}{x^3-3x^2}$。 答案：$-\frac{5}{54}$

解答:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-x}{x^3-3x^2} &= \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-x)(\sqrt{x+6}+x)}{(x^3-3x^2)(\sqrt{x+6}+x)}\\
&= \lim_{x\to 3}\frac{x+6-x^2}{(x^3-3x^2)(\sqrt{x+6}+x)}\\
&= \lim_{x\to 3}\frac{-(x-3)(x+2)}{x^2(x-3)(\sqrt{x+6}+x)}\\
&= \lim_{x\to 3}\frac{-(x+2)}{x^2(\sqrt{x+6}+x)}\\
&= -\frac{5}{9(3+3)} = -\frac{5}{54}
\end{aligned}
$$
□

2. 已知橢圓方程式 $x^2+2y^2=1$，試求出橢圓上切線斜率爲 1 的點。 答案：$\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ 及 $\left(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

解答: 已知 $x^2+2y^2=1 \Rightarrow 2x+4yy'=0 \Rightarrow y'=-\frac{x}{2y}=1 \Rightarrow x=-2y$。因爲所求的點落在橢圓上，所以我們有 $(-2y)^2+2y^2=1 \Rightarrow 6y^2=1 \Rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$，因此所求點爲 $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ 及 $\left(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$。 □

3. 試證多項式 $f(x)=2x^3-3x^2-a^2x+b,\ a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}$，在閉區間 $[0,1]$ 上最多只有一個零根。

解答: 因爲 $f(x)$ 在區間 $[0,1]$ 是連續且可微，由 Rolle's 定理可得若 $f(x)=0$ 在區間 $[0,1]$ 有兩個解，則存在 $c\in(0,1)$ 使得 $f'(c)=0$。對原函數作微分可得

$$
f'(x)=6x^2-6x-a^2=6\left(x^2-x-\frac{a^2}{6}\right)
$$

$$= 6\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{a^2}{6}\right];$$

$$f'(x) = 0 \leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{a^2}{6} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leftrightarrow \left|x-\frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{2},$$

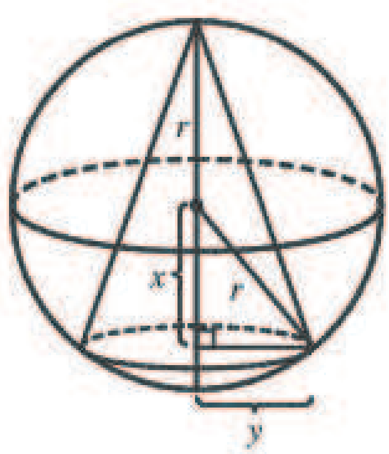
若 $f'(x^*) = 0$，因為 x^* 到 $\frac{1}{2}$ 最短距離至少要 $\frac{1}{2}$，因此 $x^* \notin (0,1)$，所以 $f(x) = 0$ 在區間 $[0,1]$ 最多有一個解。 □

4. 試求在一個半徑為 r 的球內，內切圓錐的最大體積。 答案：$\frac{32\pi r^3}{81}$

解答: 如下圖 $y^2 = r^2 - x^2$，圓錐的體積為

$$V = \frac{1}{3}\pi y^2(r+x) = \frac{1}{3}\pi(r^2-x^2)(r+x), \quad -r \leq x \leq r$$

因為 $V'(x) = \frac{\pi}{3}\left[(r^2-x^2)(1) + (r+x)(-2x)\right] = \frac{\pi}{3}(r+x)(r-3x)$，當 $x = -r$ 或 $x = \frac{r}{3}$ 時 $V'(x) = 0$ 成立。
當 x 為兩端點時，其體積 $V(r) = 0 = V(-r)$，所以體積最大值發生在 $x = \frac{r}{3}$，且體積為 $V\left(\frac{r}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\left(r^2 - \frac{r^2}{9}\right)\left(\frac{4r}{3}\right) = \frac{32\pi r^3}{81}$。 □



5. 試求使得曲線 $y(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$ 為嚴格凹向上之 x 的範圍。 答案：$x \in (-\infty, -1/2)$

解答: 對於曲線凹向上的情況，我們必定有 $y'' > 0$。
$y = \int_0^x \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x+x^2} \Rightarrow y'' = \frac{-(1+2x)}{(1+x+x^2)^2}$。因為對所有 x，我們有 $(1+x+x^2)^2 > 0$，因此要使得 $y'' > 0$，我們可得 $(1+2x) < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$。所以曲線嚴格凹向上的範圍在 $(-\infty, -1/2)$。 □

6. 試找出函數 f 及實數 a 使得 答案：$f(x) = x^{3/2}$, $a = 9$

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{x}, \quad \text{對所有的 } x > 0$$

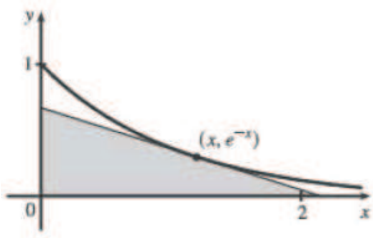
解答: 利用微積分第一基本定理，將等號兩邊同時微分可得 $\frac{f(x)}{x^2} = 2\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f(x) = x^{3/2}$。爲了求出 a，我們將 $x = a$ 代回原式可得 $6 + \int_a^a \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{a} \Rightarrow 6 + 0 = 2\sqrt{a} \Rightarrow a = 9$。 □

7. 試求曲線 $y = x$ 及 $y = x^2$ 在 $x \in [0, 1]$ 所圍的區域對直線 $y = 2$ 作旋轉的旋轉體積。 答案：$\frac{8}{15}\pi$

解答: 由圓盤法得曲線所構成橫切面爲一墊圈，小圓半徑爲 $2 - x$，大圓半徑爲 $2 - x^2$，因此

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi\left[(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2\right]\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \pi(x^4 - 5x^2 + 4x)\,\mathrm{d}x \\ &= \pi\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3} + 2x^2\right]_0^1 \\ &= \pi\left[\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 2\right] = \frac{8}{15}\pi \end{aligned}$$ □

8. 試問在第一象限中，三角形以 x 和 y 軸爲兩邊，第三邊與 $y = e^{-x}$ 相切的最大面積是多少？ 答案：$2/e$



解答: 當我們找出 $y = e^{-x}$ 的切線後，就能找出此切線與兩軸的交點，因此三角形面積即可求出。在點 $(a,\ e^{-a})$ 的切線斜率爲 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{-x}\Big|_{x=a} = -e^{-a}$，因此切線爲 $y - e^{-a} = -e^{-a}(x - a) \Leftrightarrow y = e^{-a}(a - x + 1)$。因此與 y 軸截距爲 $y = e^{-a}(a - 0 + 1) = e^{-a}(a + 1)$。爲了找出 x 軸截距，我們令 $y = 0 \Rightarrow e^{-a}(a - x + 1) = 0 \Rightarrow x = a + 1$，因此三角形面積爲 $A(a) = \frac{1}{2}[e^{-a}(a + 1)](a + 1) = \frac{1}{2}e^{-a}(a + 1)^2$。

將此式對 a 微分：$A'(a) = \frac{1}{2}[e^{-a}(2)(a + 1) + (a + 1)^2 e^{-a}(-1)] = \frac{1}{2}e^{-a}(1 - a^2)$，在 $a = \pm 1$ 時，微分值爲 0 且由一階導數檢測法可

知 $a=1$ 時有最大值。所以三角形面積的最大值爲 $A(1)=\frac{1}{2}e^{-1}(1+1)^2=2e^{-1}=2/e$。 $\square$

9. 計算 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,\mathrm{d}x$，其中 $\tan^{-1}x$ 爲 $\tan x$ 的反函數。 答案：$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{4}(\pi+\log(4))$

解答: $\int_1^\infty \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,\mathrm{d}x$，使用分部積分：

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{\tan^{-1}x}{x}+\int \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\\ &= -\frac{\tan^{-1}x}{x}+\int\left[\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right]\mathrm{d}x\\ &= -\frac{\tan^{-1}x}{x}+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln x^2+1+C\\ &= -\frac{\tan^{-1}x}{x}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{x^2+1}+C\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\tan^{-1}}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{\tan^{-1}x}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1}\right]_1^t\\ &= 0+\frac{1}{2}\ln 1+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$ $\square$

10. 設 $f(x)=(x-1)^7e^x$，試求 $f^{(20)}(1)$。 答案：$\frac{e(20!)}{13!}$

解答:

$$f(x)=\sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$$

$$e^x=ee^{(x-1)}=e\sum_{k=0}^\infty\frac{(x-1)^k}{k!}$$

則

$$f(x)=\sum_{k=0}^\infty \frac{e(x-1)^{k+7}}{k!}=\sum_{n=7}^\infty\frac{e(x-1)^n}{(n-7)!}$$

因爲 $f(x)$ 在 $x=1$ 的展開式是唯一的，因此

$$\frac{f^{(20)}(1)}{20!}=\frac{e}{13!}\Rightarrow f^{(20)}(1)=\frac{e(20!)}{13!}$$ $\square$