

學系：\_\_\_\_\_ 學號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

注意：禁止使用計算器。

問題	1: 10分	2: 10分	3: 10分	4: 10分	5: 10分	總分: 100分
得分						
問題	6: 10分	7: 10分	8: 10分	9: 10分	10: 10分	
得分						

1. 設  $xy + x - y + 1 = 0$ ，請找出  $\frac{d^3y}{dx^3}$  在點  $(2, -3)$  的值。 答案: 12

解答: 因為  $y = \frac{1+x}{1-x} = \frac{-1+x+2}{1-x} = -1 + \frac{2}{1-x}$ ，則  $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(1-x)^2}$ ， $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{(1-x)^3}$ ， $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{12}{(1-x)^4}$ 。  
 所以  $\left. \frac{d^3y}{dx^3} \right|_{x=2} = 12$ 。 □

2. 若曲線  $\gamma$  的方程式為  $y = x^3 - 3x^2 + 2$ ，請問在曲線上哪個點的切線方程式  $l$  會跟直線  $y = 9x + 4$  平行？ 答案:  $(-1, -2), (3, 2)$

解答: 先對曲線  $\gamma$  作微分，可得  $y' = 3x^2 - 6x$ 。因為題目所給直線的斜率為9，所以對切線方程式  $l$  來說，可在曲線  $\gamma$  上找到一點  $(x_0, y_0)$ ，斜率也為9。所以可得

$$3x_0^2 - 6x_0 = 9$$

$$3(x_0^2 - 2x_0 - 3) = 0$$

$$3(x_0 - 3)(x_0 + 1) = 0$$

$$x_0 = 3, -1$$

因為  $(x_0, y_0)$  在曲線  $\gamma$  上，所以  $y_0 = x_0^3 - 3x_0^2 + 2$ ，

(i) 若  $x_0 = -1$ ，則  $y_0 = -2$ 。

(ii) 若  $x_0 = 3$ ，則  $y_0 = 2$ 。

由此可知在曲線  $\gamma$  上  $(-1, -2), (3, 2)$  兩點的切線方程式會平行直線  $y = 9x + 4$ 。 □

3. 計算  $\int \ln(x^2 + 1) dx$ 。 答案:  $x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \tan^{-1}(x) + C$

解答：利用分部積分法，令  $u = \ln(x^2 + 1)$ ,  $dv = dx$ ，則  $du = \frac{2x}{x^2+1} dx$ ,  $v = x$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= x \ln(x^2 + 1) - \int \frac{2x}{x^2 + 1} \cdot x dx \\ &= x \ln(x^2 + 1) - 2 \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx \\ &= x \ln(x^2 + 1) - 2 \int 1 - \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \tan^{-1}(x) + C \quad \square \end{aligned}$$

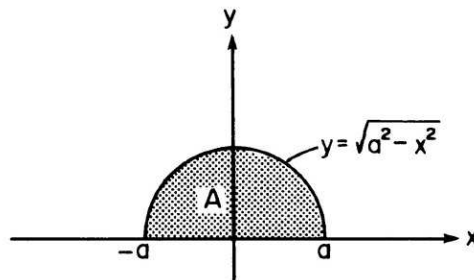
4. 計算  $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{(x - x_0)(x_1 - x)} dx$ ,  $x_0 < x_1$ 。 答案:  $\frac{\pi}{8}(x_1 - x_0)^2$

解答：先令  $a = \frac{x_1 - x_0}{2} > 0$ ，且令  $u = x - \frac{x_0 + x_1}{2}$ 。觀察  $\frac{x_0 + x_1}{2}$  為積分範圍  $[x_0, x_1]$  的中點， $a$  為中點到積分範圍  $[x_0, x_1]$  兩端點的距離。

所以  $x - x_0 = u + a$ ,  $x - x_1 = u - a$ ；若  $x = x_0$ ，則  $u = -a$ ；若  $x = x_1$ ，則  $u = a$ ，由此可知變數變換之後的積分範圍為  $[-a, a]$ ，積分改寫為

$$I = \int_{-a}^a \sqrt{(u + a)(a - u)} du = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - u^2} du$$

此積分相當於在半圓  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $-a \leq x \leq a$  的面積  $A$  (如下圖)。因此  $I = \frac{\pi a^2}{2} = \frac{\pi}{8}(x_1 - x_0)^2$ 。  $\square$



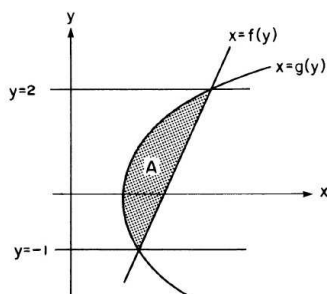
5. 設  $R$  為由  $y^2 = x - 1$  和  $y = x - 3$  所圍的區域，列出求下列問題之積分式 (a)  $R$  之面積； (b)  $R$  之周長； (c)  $R$  對直線  $y = 2$  旋轉之旋轉體體積。(不需計算其結果)

答案: (a)  $\int_{-1}^2 [y + 2 - y^2] dy$ ; (b)  $\int_{-1}^2 \sqrt{1 + 4y^2} dy + \int_{-1}^2 \sqrt{2} dy$ ; (c) 殼法  $\int_{-1}^2 2\pi(2 - y)(2 + y - y^2) dy$  或圓盤法  $\int_1^2 \pi [8\sqrt{x - 1}] dx + \int_2^5 \pi [(x - 5)^2 - (\sqrt{x - 1} - 2)^2] dx$

解答: (a) 轉換方程式為

$$y = x - 3 \Rightarrow x = f(y) = y + 3$$
$$y^2 = x - 1 \Rightarrow x = g(y) = y^2 + 1$$

如下圖。兩曲線的交點為



$$y + 3 = y^2 + 1$$
$$y^2 - y - 2 = 0$$
$$(y - 2)(y + 1) = 0$$
$$y = 2, -1$$

由此可知兩曲線交點在 $(2, -1)$ ,  $(5, 2)$ 。因此曲線包圍的的面積 $A$ 為

$$A = \int_{-1}^2 [f(y) - g(y)] dy = \int_{-1}^2 [y + 2 - y^2] dy$$

(b)  $R$  之周長為  $(x = g_1(y) = y^2 + 1, x = g_2(y) = y + 3)$ , 交點為  $(5, 2), (2, -1)$

$$\int ds = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$
$$= \int_{-1}^2 \sqrt{1 + (2y)^2} dy + \int_{-1}^2 \sqrt{1 + (1)^2} dy$$
$$= \int_{-1}^2 \sqrt{1 + 4y^2} dy + \int_{-1}^2 \sqrt{2} dy$$

(c) 利用殼法得體積為(半徑 =  $2 - y$ )

$$\int_{-1}^2 2\pi(2 - y) [(y + 3) - (y^2 + 1)] dy = \int_{-1}^2 2\pi(2 - y) (2 + y - y^2) dy$$

或利用圓盤法得體積為

$$\int_1^2 \pi [(-\sqrt{x-1}-2)^2 - (\sqrt{x-1}-2)^2] dx + \int_2^5 \pi [((x-3)-2)^2 - (\sqrt{x-1}-2)^2] dx$$

$$= \int_1^2 \pi [8\sqrt{x-1}] dx + \int_2^5 \pi [(x-5)^2 - (\sqrt{x-1}-2)^2] dx$$

6. 設  $f(x) = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$ ，求  $f(x)$  的相對極大、相對極小和反曲點。 答案：相對極大  $(0, 0)$ ，相對極小  $(2, -3\sqrt[3]{4})$ ，反曲點  $(-1, -6)$

解答：  $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}(x-5) + x^{2/3} = \frac{1}{3}x^{-1/3}(2(x-5) + 3x) = \frac{5}{3}x^{-1/3}(x-2)$  得臨界點  $x = 0, 2$ ，但

$x$	$< 0$	$= 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	$> 0$	$= 0$	$< 0$	$= 0$	$> 0$
$f(x)$	$\uparrow$	相對極大	$\downarrow$	相對極小	$\uparrow$

所以相對極大點為  $(0, 0)$ ，相對極小點為  $(2, -3\sqrt[3]{4})$ 。

又

$$f''(x) = \frac{5}{3} \left( -\frac{1}{3} \right) x^{-4/3}(x-2) + \frac{5}{3} x^{-1/3}$$

$$= -\frac{5}{9} x^{-4/3}(x-2-3x)$$

$$= \frac{10}{9} x^{-4/3}(x+1)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1$$

$x$	$< -1$	$= -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f''(x)$	$< 0$	$= 0$	$> 0$	$= 0$	$> 0$
$f(x)$		反曲點		DNE	

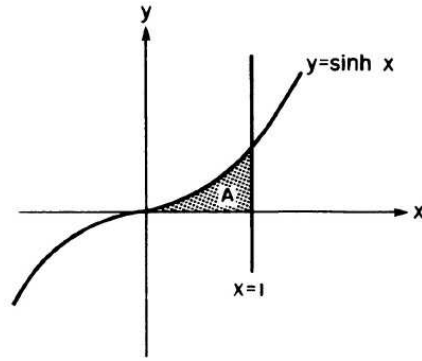
有反曲點為  $(-1, 6)$ 。 □

7. 求由  $x$  軸、 $x = 1$  和用參數表示的曲線  $x = \ln t$ ， $y = \frac{t-t^{-1}}{2}$  所圍面積為何？ 答案：

$$\frac{e+e^{-1}}{2} - 1 = \cosh 1 - 1$$

解答：明顯可看出  $t > 0$ 。若令  $t = e^x$ ， $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$ ， $-\infty < x < \infty$ ，則面積  $A$  為(如下圖)

$$A = \int_0^1 y dx$$



方法1 (參數法)

積分範圍： $x = 0 \leftrightarrow t = 1, x = 1 \leftrightarrow t = e$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 y \, dx = \int_1^e y(t) \frac{dx}{dt} \, dt = \int_1^e \left( \frac{t - t^{-1}}{2} \right) \frac{1}{t} \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_1^e [1 - t^{-2}] \, dt = \frac{1}{2} [t + t^{-1}] \Big|_{t=1}^{t=e} \\ &= \frac{e + e^{-1}}{2} - 1 = \cosh 1 - 1 \end{aligned}$$

方法2 (代換法  $y = f(x) = \sinh x$ )

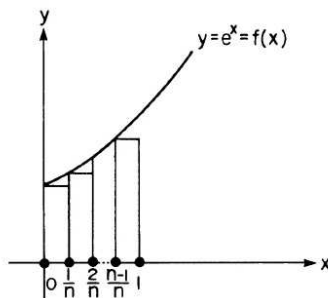
$$A = \int_0^1 \sinh x \, dx = \cosh x \Big|_{x=0}^{x=1} = \cosh 1 - 1 \quad \square$$

8. 計算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \dots + \sqrt[n]{e^{n-1}}}{n}$ 。 答案： $e - 1$

解答：

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} e^{\frac{k}{n}} \end{aligned}$$

先考慮函數  $f(x) = e^x$  在區間  $[0, 1]$  的圖形，若分成  $n$  個相同間隔的子區間時，則  $f(\frac{k-1}{n}) = e^{\frac{k-1}{n}}$  為函數  $f(x)$  的第  $k$  個子區間的起始點之值。令  $\Delta x = \frac{1}{n}$ ，則



$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\Delta x \rightarrow 0)}} \sum_{k=1}^n f((k-1)\Delta x)\Delta x \\
 &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 e^x dx = e - 1 \quad \square
 \end{aligned}$$

9. 若函數  $f$  滿足下列兩條件： $f'(x) = 1 + (f(x))^{10}$  且  $f(0) = 1$ ，求  $f(x)$  對  $x = 0$  作泰勒展開式的前四項。  
 答案： $1 + 2x + 10x^2 + \frac{280}{3}x^3$

解答：函數  $f(x)$  對 0 作泰勒展開式的 3 階多項式為  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ ，其中  $a_0 = f(0) = 1$ ； $a_1 = f'(0) = 1 + 1 = 2$ ； $f''(x) = 10f'(x)[f(x)]^9$ ； $a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{20}{2!} = 10$ ； $f'''(x) = 10f''(x)[f(x)]^9 + 90[f'(x)]^2[f(x)]^8$ ； $a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{10(20) + (90)(4)}{3!} = \frac{280}{3}$  因此  $P(x) = 1 + 2x + 10x^2 + \frac{280}{3}x^3$ 。  $\square$

10. 計算  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{1}{x}}{x}$  和  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{1}{x}}{x}$ 。 答案：1； $-\infty$

解答：(i) 當  $x \rightarrow 0^+$ ， $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan^{-1} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ ，在此種情況要使用 l'Hôpital' 法則（因為  $\frac{0}{0}$ ），則此極限為

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{1}{x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{d}{dx} \left( \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{1}{x} \right)}{\frac{d}{dx} x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+x^2} = 1
 \end{aligned}$$

(ii) 當  $x \rightarrow 0^-$ ， $\lim_{x \rightarrow 0^-} \tan^{-1} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ ，在此種情況此極限為

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{1}{x}}{x} = \frac{\pi}{0^-} = -\infty \quad \square$$