

95 學年度基礎學科微積分競試試題解答

1. 解：(1) 因 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂，故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ，則存在 N 使得 $0 < a_n < 1$ ，當 $n \geq N$ ，

又因 $\sum_{n=N}^{\infty} a_n^2 \leq \sum_{n=N}^{\infty} a_n$ 收斂，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{N-1} a_n^2 + \sum_{n=N}^{\infty} a_n^2$ 收斂。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ 可能收斂，也可能發散。

例子： $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收斂，且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 發散； $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 收斂和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收斂。 //

2. 解：(方法一)

因 $f(x)$ 為嚴格單調可微函數，故反函數 f^{-1} 存在，且為嚴格單調可微函數，同時 $(f^{-1}(y))' f'(x) = 1$ ，利用分部積分

$$\int_{f(b)}^{f(a)} f^{-1}(y) dy = y f^{-1}(y) \Big|_{f(a)}^{f(b)} - \int_{f(a)}^{f(b)} y (f^{-1}(y))' dy$$

利用變數變換 $y = f(x)$ ，則

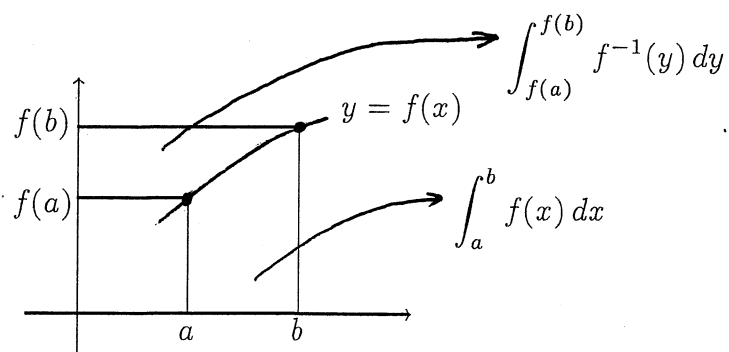
$$\int_{f(a)}^{f(b)} (f^{-1}(y))' dy = \int_a^b f(x) \frac{1}{f'(x)} f'(x) dx = \int_a^b f(x) dx = F(b)$$

故可得

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y) dy = b f(b) - a f(a) - F(b)$$

(方法二)

若 f 遞增，



$$\begin{aligned} \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y) dy &= b f(b) - a f(a) - \int_a^b f(x) dx \\ &= b f(b) - a f(a) - F(b) \end{aligned}$$

若 f 遞減，證明類似。

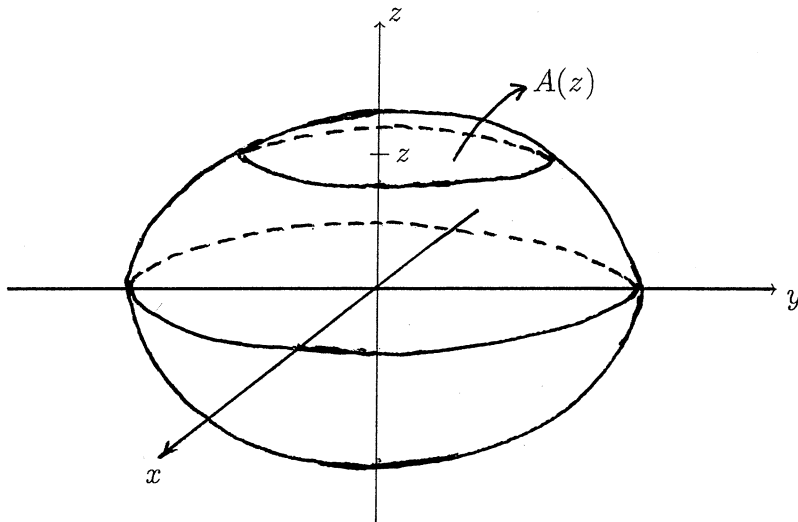
95 學年度基礎學科微積分競試試題解答

3. 解：Torus 的體積為 $V = \pi a^2 2\pi b^2$ ，因 $2x : 2a = \theta : \frac{\pi}{2}$ ，故 $x = \frac{2a}{\pi}\theta$

又 $2y : 2b = \theta : \frac{\pi}{2}$ ，故 $y = \frac{2b}{\pi}\theta$ ，橢圓面積 $A(\theta) = \pi xy = \frac{4ab}{\pi}\theta^2$

$$\begin{aligned} \text{螺殼體積 } V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} A(\theta)(r+x) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \frac{4ab}{\pi} \theta^2 + \frac{8a^2b}{\pi^2} \theta^3 d\theta \\ &= \frac{\pi^2 ab r}{6} + \frac{\pi^2 a^2 b}{8} \end{aligned}$$

4. 解：



因橢圓體 $\frac{(x-a)^2}{A^2} + \frac{(y-b)^2}{B^2} + \frac{(z-c)^2}{C^2} = 1$ 平移 (a, b, c)

可得橢圓體 $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$ ，故體積相同。

固定 z 設橢圓截面積 = $A(z)$ ，因 $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 - \frac{z^2}{C^2}$ ，

則 $\frac{x^2}{A^2(1 - \frac{z^2}{C^2})} + \frac{y^2}{B^2(1 - \frac{z^2}{C^2})} = 1$ ，故 $A(z) = \pi A \sqrt{1 - \frac{z^2}{C^2}} B \sqrt{1 - \frac{z^2}{C^2}}$

橢圓體的體積：

$$V = \int_{-C}^C A(z) dz = \int_{-C}^C \pi AB \left(1 - \frac{z^2}{C^2}\right) dz = \frac{4}{3} \pi ABC$$

95 學年度基礎學科微積分競試試題解答

5. 解：

由微積分基本定理

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$$

用分部積分，

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \int_0^x f''(t)(x-t) dt$$

再次用分部積分

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{1}{2!} \int_0^x f'''(t)(x-t)^2 dt$$

6. 解：

$$(a) \frac{dy}{dx} = \frac{3 \sinh(x^2 + 4)(2x)\sqrt{x^2 + 3x + 1} - 3 \cosh(x^2 + 4) \frac{1}{2} \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+1}}}{x^2 + 3x + 1}$$

$$(b) y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \text{ 和 } e^{-x} = -y + \sqrt{y^2 + 1}$$

$$\text{又 } \sinh^{-1} \sinh x = x, \text{ 則 } (\sinh^{-1} y)' = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}$$

對於 $y = \sinh^{-1} e^x$ ，用連鎖法則，

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (\sinh^{-1} y)' \Big|_{y=e^x} \cdot e^x \\ &= \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}} \Big|_{y=e^x} \cdot e^x = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} + 1}} \end{aligned}$$

(c) 令 $F(x) = \int_0^x \sin(t^3)e^{-t^3} dt$ ，根據微積分基本定理，

$$F'(x) = \sin(x^3)e^{-x^3},$$

且

$$y = \int_{x^2}^{x^3} \sin(t^3)e^{-t^3} dt = F(x^3) - F(x^2)$$

現在求導數，由連鎖法則

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= F'(x^3)(3x^2) - F'(x^2)(2x) \\ &= 3x^2 \sin(x^9)e^{-x^9} - 2x \sin(x^6)e^{-x^6} \end{aligned}$$

95 學年度基礎學科微積分競試試題解答

7. 解：

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \int x^2 \tan^{-1} x^3 dx \quad \text{令 } u = x^3 \text{ 且 } du = 3x^2 dx \\
 &= \frac{1}{3} \int \tan^{-1} u \cdot du \quad \text{用分部積分} \\
 &= \frac{1}{3} \left[u \tan^{-1} u - \int \frac{u}{1+u^2} du \right] \\
 &= \frac{1}{3} x^3 \tan^{-1} x^3 - \frac{1}{2} \ln(1+x^6) + C \quad \quad \quad ///
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad & \int \frac{u}{u^6 - 8} du \quad \quad \quad (x = u^2) \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^3 - 8} dx \\
 &= \frac{1}{24} \int \frac{1}{x-2} - \frac{1}{24} \int \frac{x+4}{x^2+2x+4} dx \\
 &= \frac{1}{24} \ln|x-2| - \frac{1}{24} \int \frac{x+1}{x^2+2x+4} dx - \frac{1}{8} \int \frac{1}{(x+1)^2+3} dx \quad (x+1 = \sqrt{3}V) \\
 &= \frac{1}{24} \ln|x-2| - \frac{1}{48} \ln|x^2+2x+4| - \frac{1}{8} \int \frac{1}{(\sqrt{3}V)^2+3} \sqrt{3} dV \\
 &= \frac{1}{24} \ln|x-2| - \frac{1}{48} \ln|x^2+2x+4| - \frac{1}{8\sqrt{3}} \tan^{-1} V + C \\
 &= \frac{1}{24} \ln|u^2-2| - \frac{1}{48} \ln|u^4+2u^2+4| - \frac{1}{8\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{u^2+1}{\sqrt{3}} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad & \int \sin^6 x dx \quad \quad \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \\
 &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^3 dx \quad \quad \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \\
 & \quad \quad \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \\
 &= \frac{1}{8} \int 1 - 3 \cos 2x + 3 \cos^2 x - \cos^3 2x dx \\
 &= \frac{1}{8} \left[x - \frac{3}{2} \sin 2x + \frac{3}{2} \int 1 + \cos 4x dx - \int \cos 2x - \sin^2 2x \cos 2x dx \right] \\
 &= \frac{1}{8} \left[x - \frac{3}{2} \sin 2x + \frac{3}{2} x + \frac{3}{8} \sin 4x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{6} \sin^3 2x \right] + C \\
 &= \frac{1}{8} \left[\frac{5}{2} x - 2 \sin 2x + \frac{3}{8} \sin 4x + \frac{1}{6} \sin^3 2x \right] + C
 \end{aligned}$$

95 學年度基礎學科微積分競試試題解答

8. 解：

$$(a) \text{ 因 } \frac{dx}{dt} = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \begin{cases} > 0 & \text{當 } -\infty < t < 0, x \text{ 向右移} \\ = 0 & \text{當 } t = 0, \\ < 0 & \text{當 } 0 < t < \infty, x \text{ 向左移} \end{cases}$$

所以當 $-\infty < t \leq 0$ 時, y 為 x 的函數,

或當 $0 \leq t < \infty$ 時, y 為 x 的函數。

當 $-\infty < t \leq 0$ 時, $-1 < x(t) \leq +1$, 所以定義域 = $(-1, 1]$ 。

(b) (方法一)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{t^4 + 4t^2 - 1}{4t} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{(t^2 + 2 + \sqrt{5})(t + \sqrt{\sqrt{5}-2})(t - \sqrt{\sqrt{5}-2})}{4t} \begin{cases} < 0 & \text{當 } -\infty < t < -\sqrt{\sqrt{5}-2} \\ = 0 & \text{當 } t = -\sqrt{\sqrt{5}-2} \\ > 0 & \text{當 } -\sqrt{\sqrt{5}-2} < t < 0 \end{cases}$$

$$\text{極值點 } (x(-\sqrt{\sqrt{5}-2}), y(-\sqrt{\sqrt{5}-2})) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, -\sqrt{\sqrt{5}-2} \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)$$

$$y = f(x) \begin{cases} \text{遞減當 } t < -\sqrt{\sqrt{5}-2} \\ \text{遞增當 } -\sqrt{\sqrt{5}-2} < t < 0 \end{cases}$$

$$t \rightarrow -\infty \Rightarrow x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \rightarrow -1$$

$$y(t) = t \frac{1-t^2}{1+t^2} \rightarrow +\infty$$

有垂直漸近線 $x = -1$ 。

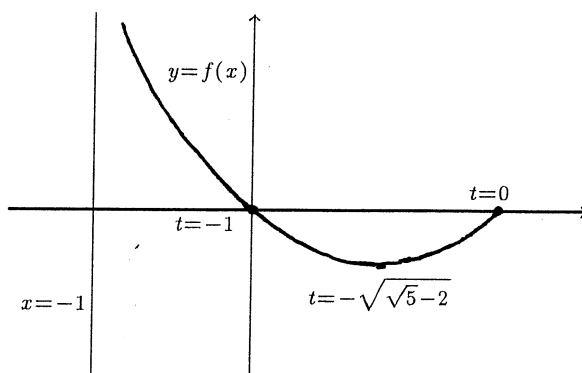
$$x(0) = 1 \quad y(0) = 0$$

$$x(-1) = 0 \quad y(-1) = 0$$

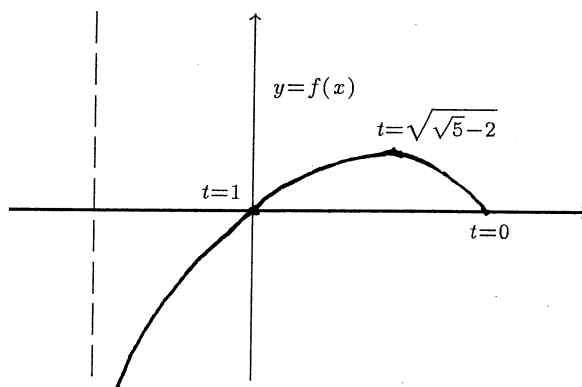
$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dt} \frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{\frac{d}{dt} \frac{t^4+4t^2-1}{4t}}{\frac{-4t}{(1+t^2)^2}} = \frac{-(1+t^2)^2 (3t^4+4t^2-1)}{16t^3} \leq 0 \end{aligned}$$

95 學年度基礎學科微積分競試試題解答

當 $t < 0$, 則 $y = f(x)$ 上凹 $x \in (-1, 1]$



當 $0 \leq t < \infty$,



(方法二)

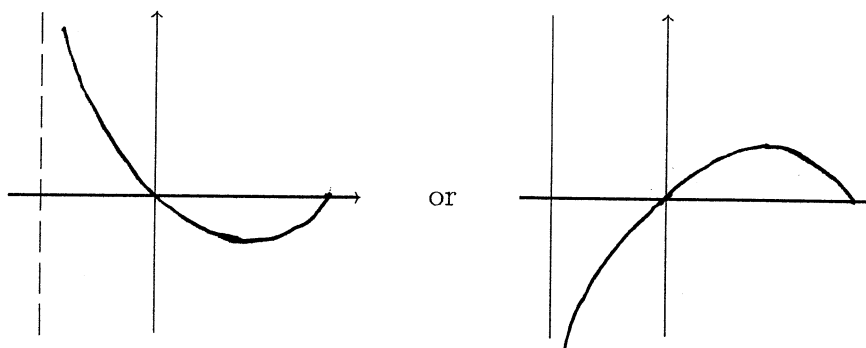
$$\text{因 } x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ 和 } y(t) = t \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow y = \pm x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad -1 < x \leq 1$$

$$\text{計算 } \frac{dy}{dx} = \pm \frac{1-x-x^2}{(1+x)^2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{2x^2+3x-4}{(1+x)^2(1-x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

垂直漸近線： $x = -1$

作圖：



95 學年度基礎學科微積分競試試題解答

9.

解：因為

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{nn}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{n}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{n}}} \right) \frac{1}{n} \end{aligned}$$

此為瑕積分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 的黎曼和，則

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} 2\sqrt{1} - 2\sqrt{a} = 2 \end{aligned}$$

10. 解：對於 $x \neq 0$, x^3 , $\sin x$, $\frac{1}{x^2}$ 皆為可微分函數，故 $x^3 \sin \frac{1}{x^2}$ 為可微分函數且

$$f'(x) = 3x^2 \sin \frac{1}{x^2} - 2 \cos \frac{1}{x^2}$$

對於 $x = 0$, 因極限存在

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^2 \sin \frac{1}{x^2} \rightarrow 0 \text{ 當 } x \rightarrow 0$$

故 $f'(0) = 0$ 。

但是 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ 不存在，所以 $f'(x)$ 除 0 點外為連續函數。

///