[雙週一題]網路數學問題徵答
九十七學年度第二學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第一題: 98.02.20公佈，98.03.06中午12點截止

令F_n爲費伯那西數列$(F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n \geq 2)$。試求

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}}$$

解答：

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}F_nF_{n+1}} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_{n+1} - F_{n-1}}{F_{n-1}F_nF_{n+1}} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{F_{n-1}F_n} - \frac{1}{F_nF_{n+1}} \right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{F_{n-1}F_n} - \frac{1}{F_nF_{n+1}} \right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{F_1F_2} - \frac{1}{F_NF_{N+1}} \right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{F_1F_2} - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{F_NF_{N+1}}
\end{aligned}$$

顯然$\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$爲一遞增數列，因此$F_{n+1} \geq F_n + 1,\ n \geq 2$。宣稱$F_n \geq n - 1, n \geq 2$。$n = 2$時，顯然成立。假設$n = k, k \geq 2$時，$F_k \geq k - 1$成立，則$F_{k+1} \geq F_k + 1 \geq k - 1 + 1 = k$。因此

$$0 < \frac{1}{F_NF_{N+1}} \leq \frac{1}{(N-1)N}, \qquad N \geq 2$$

而由夾擠定理可得$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{F_NF_{N+1}} = 0$。所以

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{F_1F_2} = \frac{1}{F_1F_2} = 1 \qquad \square$$

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『 雙週一題 』信箱，或傳眞07-5253809，

或利用電子郵件信箱problem@math.nsysu.edu.tw (主旨爲「雙週一題」) 。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和E-mail。