[雙週一題]網路數學問題徵答
九十六學年度第二學期

主辦單位:　中山大學應用數學系
補助單位:　教育部

第四題:　97.04.04公佈，97.04.18中午12點截止

若$P(x), Q(x), R(x), S(x)$爲多項式且滿足

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)S(x)$$

試證$x - 1$爲$P(x)$的因式。

解答：首先我們可以觀察到，當$x = e^{2\pi i/5}, i = 1, 2, 3, 4$時，則題目右式爲0。令$\alpha = e^{2\pi i/5}$，接著將$x = \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$分別代入題目中的方程式，則我們有

$$\begin{array}{rcrcrcl} P(1) & + & \alpha\, Q(1) & + & \alpha^2\, R(1) & = & 0 \\ P(1) & + & \alpha^2\, Q(1) & + & \alpha^4\, R(1) & = & 0 \\ P(1) & + & \alpha^3\, Q(1) & + & \alpha\, R(1) & = & 0 \\ P(1) & + & \alpha^4\, Q(1) & + & \alpha^3\, R(1) & = & 0 \end{array}$$

將上列四個方程式相加，並利用$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$，可得

$$4P(1) - Q(1) - R(1) = 0 \tag{1}$$

而將上列四個方程式分別乘以$\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$後相加，可得

$$-P(1) - Q(1) - R(1) = 0 \tag{2}$$

由(1)和(2)可得

$$4P(1) = Q(1) + R(1) = -P(1)$$

所以$P(1) = 0$，得證。 □

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞07-5253809，或利用電子郵件信箱problem@math.nsysu.edu.tw (主旨爲「雙週一題」) 。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和E-mail。